Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingtième semaine

David A. Madore

`david.madore@ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.69 ± 0.25. Écart type : 2.65.

Un classique de l'Agrégation (je dis ça pour frimer). *Soit u une fonction de classe C^2 sur un intervalle fermé borné $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ (avec $a < b$). On suppose que u est nulle en a et b et strictement positive sur $]a;b[$. Montrer que*

$$\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u(t)}\right| dt \geq \frac{4}{b-a}$$

[Indication : Notant $\|u\|$ la borne supérieure de u sur $[a;b]$, et c un point où cette borne est atteinte, montrer que $\frac{1}{\|u\|}\int_a^b |u''(t)|\,dt \geq \frac{1}{\|u\|}(\sup_{t\in[a;c]} u'(t) - \inf_{t\in[c;b]} u'(t))$.]

La fonction Gamma. *On définit la fonction Γ par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

Montrer que Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout z. Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Plus dur : montrer que Γ est dérivable. Très dur : on appelle γ la limite de la suite

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Montrer que γ existe et que la dérivée de Γ en 1 est $-\gamma$.

Un contre-exemple important. *Montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ (avec f_n, f des fonctions continues, et, pourquoi pas, positives) uniformément sur $\mathbb{R}$ sans pour autant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n \to \int_{-\infty}^{+\infty} f$.*

Autre contre-exemple important. *Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas convergente [au sens donné à ce terme par le programme 1996–1997 des Classes Préparatoires — voir note], mais que pourtant $\int_{-A}^{B} \frac{\sin t}{t}\, dt$ admet une limite lorsque $A \to +\infty$ et $B \to +\infty$. [On dit que l'intégrale est "semi-convergente".]*

> **Remarque importante :** Le programme des Classes Préparatoires a apparemment changé cette année de définition des fonctions intégrables (probablement pour se conformer aux définitions en vigueur dans la théorie de Lebesgue) ; jusqu'à cette année, des fonctions comme $\frac{\sin t}{t}$ étaient considérées comme intégrables. Des confusions sont à prévoir.

Troisième contre-exemple important. *Montrer qu'il existe des fonctions (continues) positives f telles que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, et que pourtant $f(t)$ ne tende pas vers 0 en $+\infty$.*

Amusant (?). *Si $0 < x < 1$, on pose $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Déterminer $\lim_{x\to 1} F(x)$. [Indication : Si $x^2 \leq t \leq x$ alors $\frac{x^2}{t\ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x}{t \ln t}$.] En déduire la valeur de*

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$$

[Indication : Dériver F.]