Exercices de khôlle pour la MPSI

Dix-neuvième semaine

David A. Madore
david.madore@ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.62 ± 0.26. Écart type : 2.67.

Exercice sans grand rapport avec le chapitre. *Soit M une matrice rélle inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M^{-1} = P(M)$. [Indication : On pourra montrer tout d'abord qu'il existe un polynôme Q non nul tel que $Q(M) = 0$.]*

Exercice inqualifié. *Soit M une matrice réelle $n \times n$. On suppose qu'il existe $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_r = n$ tels que, si on appelle A_{kl} la matrice obtenue en ne gardant que les lignes $i_{k-1}+1$ à i_k et le colonnes $i_{l-1}+1$ à i_l de M, alors elles vérifient :*

(i) A_{kl} est nulle si $k > l$.
(ii) A_{kk} est inversible pour tout k

(Autrement dit, M est diagonale par blocs à blocs diagonaux inversibles.) Montrer qu'alors M est inversible.

Exercice très ludique. *On considère n inconnues $t_1, \ldots, t_n$, et r un naturel entre 0 et n. On demande de résoudre le système constitué des équations*

$$t_{i_1} + \cdots + t_{i_r} = 0$$

pour tous $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ deux à deux distincts. (Autrement dit, une somme de r quelconques parmi les n inconnues est nulle.) [Indication : Éliminer rapidement les cas $r = 0$ et $r = n$, puis se concentrer sur le cas $r = n-1$ avant de résoudre le problème général.]

Exercice vandermondesque. *On considère $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer par la méthode du pivot de Gauss que le système*

$$\begin{cases} t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 0 \\ \alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_n t_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0^n t_0 + \alpha_1^n t_1 + \cdots + \alpha_n^n t_n = 0 \end{cases}$$

est de Cramér.

Exercice trop facile. *Soit A un nombre réel. Résoudre le système*

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_0 + t_1 = A \\ t_0 + 2t_1 + t_2 = A^2 \\ \vdots \\ t_0 + nt_1 + C_n^2 t_2 + \cdots + t_n = A^n \end{cases}$$

Exercice (un peu) trop facile. *Résoudre le système*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

pour $a_{ij} = i + j$*, puis pour* $a_{ij} = ij$*, puis pour* $a_{ij} = i^j$.

Le pivot de Jordan. *On rappelle qu'une transvection est une matrice ayant une diagonale de 1 et un seul coefficient non nul en dehors de la diagonale. Montrer que toute matrice inversible peut s'écrire comme* $T_1 \cdots T_n D$ *où* T_i *sont des transvections et* D *est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sauf éventuellement le dernier sont égaux à 1.*