Exercices de khôlle pour la MPSI

Dix-huitième semaine

David A. Madore
`david.madore@clipper.ens.fr`
`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.61 ± 0.27. Écart type : 2.70.

Exercice taupin. *Soit E un espace euclidien, et p une projection non nulle. On note $\|p\| = \inf_{\|x\|=1} \|p(x)\|$. On suppose que $\|p\| \leq 1$: montrer alors que $\|p\| = 1$ et que p est une projection orthogonale.*

Exercice très taupin. *Soit E un espace vectoriel réel, et $\|\cdot\|$ une norme sur E (c'est-à-dire une application $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}_+$ telle que $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$, que $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ et que $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$). On suppose que $\|\cdot\|$ vérifie l'identité :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Montrer que la norme est euclidienne, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire euclidien $(\cdot|\cdot)$ pour lequel $\|x\|^2 = (x|x)^2$. Montrer de plus que ce produit scalaire est unique.

Exercice nacsze. *On considère l'application de $\mathbb{R}[X]^2$ dans $\mathbb{R}$, qui à (P, Q) fait correspondre*

$$\int_{-1}^{+1} P(t)\, Q(t)\, dt$$

Vérifier qu'il s'agit là d'un produit scalaire euclidien. On considère la famille (P_n) obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (X^n) (il s'agit d'une famille infinie, mais cela ne gène en rien l'application du procédé de Gram-Schmidt). Montrer que le polynôme P_n est un polynôme de degré n. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3. Montrer que P_n admet n racines distinctes dans $]-1;1[$. [Indication : sinon, en multipliant par un polynôme de petit degré (donc orthogonal à P_n), on obtient un polynôme de signe constant sur $[-1;1]$.]

Remarque : À une constante près, les P_n sont les polynômes de Legendre.

Déterminant de Gram sans déterminant. *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un espace euclidien. On appelle matrice de Gram correspondante la matrice $(x_i|x_j)_{i,j}$. Montrer que cette matrice est inversible ssi la famille $x_1, \ldots, x_n$ est libre. [Indication : le "seulement si" se traîte en supposant une relation de dépendance linéaire entre les x_i ; le "si" se traîte en écrivant la matrice comme produit de deux matrices inversibles.]*

Surprise-série. *Soit (Σa_n) une série telle que (Σa_n^2) converge. Montrer que pour tout $\mu > \frac{1}{2}$, la série $(\Sigma \frac{a_n}{n^\mu})$ converge.*

Un classique. *Une famille de vecteurs d'un espace euclidien est dite obtusangle ssi deux vecteurs quelconques de cette famille ont un produit scalaire strictement négatif. Montrer que dans un espace euclidien de dimension n il existe des familles obtusangles de cardinal $n+1$, mais pas davantage.*