Exercices de khôlle pour la MPSI

Dix-septième semaine

David A. Madore

`david.madore@ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.64 ± 0.28. Écart type : 2.75.

Exercice passablement difficile. *Montrer que pour tout t réel non multiple de π, la série*

$$\frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - k\pi} + \frac{1}{t + k\pi} \right)$$

converge. Soit $f(t)$ sa somme : déterminer cette fonction (c'est une fonction connue).

Dérivations. *Si L est un corps contenant un autre corps K (de sorte que L est un K-espace vectoriel), alors une K-dérivation de L est une application $D: L \to L$, qui est K-linéaire et telle que $D(ab) = D(a)\,b + aD(b)$ pour tous $a, b \in L$. On demande de déterminer toutes les K-dérivations de $K(X)$.*

Valuations. *Si L est un corps contenant un autre corps K (de sorte que L est un K-espace vectoriel), alors une K-valuation (normalisée) de L est une application $v: L \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ telle que*

(i) $v(a) = 0$ *si* $a \in K$.

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$ *pour tous* $x, y \in L$.

(iii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ *pour tous* $x, y \in L$.

(iv) Il existe x tel que $v(x) = 1$.

On demande de déterminer toutes les $\mathbb{C}$-valuations de $\mathbb{C}(X)$. [Indication : on considèrera $f \in \mathbb{C}(X)$ tel que $v(f) = -1$, et on décomposera f en éléments simples.] En déduire que si $f \in \mathbb{C}(X)$, alors

$$\sum_v v(f) = 0$$

où la somme est prise sur toutes les $\mathbb{C}$-valuations (formule dite "du produit").

Suites de fonctions rationnelles. *Soit $a \in \mathbb{C}$, ou bien (formellement) $a = \infty$. Deux éléments $f, g \in \mathbb{C}(X)$ sont dits r-proches en a (pour $r \in \mathbb{N}$) ssi $f - g$ est définie en a et y a un zéro d'ordre au moins r (lorsque $a \in \mathbb{C}$), ou bien, lorsque $a = \infty$, ssi $f - g$ est de degré $\leq -r$. Une suite (f_n) d'éléments de $\mathbb{C}(X)$ est dite converger (par rapport à a) vers un élément $f \in \mathbb{C}(X)$ ssi pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, f_n et f soient r-proches en a. On dit aussi que f est une limite de la suite (f_n). Montrer que si la limite existe, elle est unique. Une suite $(f_n$ d'éléments de $\mathbb{C}(X)$ est dite de Cauchy (par rapport à a) ssi pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq n_0$, f_p et f_q soient r-proches en a. Montrer qu'une suite peut être de Cauchy sans converger (et ce, quelque soit a).*

Exercice sans grand intérêt. *Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur un élément f de $\mathbb{C}(X)$ pour qu'il soit la dérivée d'un élément g de $\mathbb{C}(X)$.*

Calcul de résidus. *Soit $f \in \mathbb{C}(X)$. Le résidu de f en un point $a \in \mathbb{C}$ est par définition le numérateur λ du terme $\frac{\lambda}{X-a}$ dans la décomposition en éléments simples de f. Si f n'a pas de pôle en a, son résidu est 0. On considère une fonction rationnelle f de degré ≤ -2. Montrer que la somme de ses résidus en tous les points $a \in \mathbb{C}$ est nulle. On suppose de plus que f n'a pas de pôle sur l'axe réel. Montrer qu'alors la quantité*

$$\int_{-M}^{M} f(t)\,dt$$

admet une limite lorsque $M \to +\infty$, et que cette limite est égale à $i\pi$ fois la somme des résidus de f étendue à tous les complexes de partie imaginaire strictement positive.

Exercice modérément intéressant. *Soit f une fonction rationnelle complexe dont la partie réelle est positive partout où elle est définie. Montrer que f est une constante.*

Exercice de géométrie. *Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$. Si $M = (x, y)$ est un point de $\mathcal{H}$ avec $x, y \geq 0$, soit $\mathcal{A}$ l'aire de la région délimitée par OM, OA et $\mathcal{H}$, où $O = (0, 0)$ et $A = (1, 0)$. Déterminer x et y en fonction de $\mathcal{A}$.*

Polynômes de Laurent. *On appelle polynôme de Laurent une fraction rationnelle complexe n'ayant pas de pôle en dehors de 0. Montrer que les polynômes de Laurent forment un anneau et trouver son groupe des éléments inversibles (unités).*