Exercices de khôlle pour la MPSI

Seizième semaine

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.64 ± 0.29. Écart type : 2.78.

Sans commentaire. *Soit M une matrice carrée $n \times n$ telle que $M - I_n$ soit nilpotente (i.e. $(M - I_n)^k = 0$ pour un certain k). Montrer que M est inversible.*

Sans commentaire non plus. *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice réelle carrée $n \times n$ "à diagonale dominante", c'est-à-dire telle que*

$$\forall i \ \ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$$

Montrer que M est inversible.

Exercice classique. *On appelle <u>idéal</u> (bilatère) de $\mathbb{M}_n(K)$ un sous espace vectoriel $\mathfrak{j}$ de $\mathbb{M}_n(K)$ tel que $MA \in \mathfrak{j}$ et $AM \in \mathfrak{j}$ dès que $M \in \mathbb{M}_n(K)$ et $A \in \mathfrak{j}$. Montrer que les seuls idéaux de $\mathbb{M}_n(K)$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{M}_n(K)$.*

Exercice stupide. *Une matrice M carrée est dite symétrique ssi ${}^tM = M$, antisymétrique ssi ${}^tM = -M$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ des matrices antisymétriques (toutes de taille fixée $n \times n$). Montrer que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathbb{M}_n(K)$, sous une petite hypothèse sur le corps K, que l'on précisera.*

Exercice inqualifié. *Une matrice (carrée) est dite magique ssi la somme de chaque colonne égale la somme de chaque ligne égale une constante. Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ de $\mathbb{M}_n(K)$ formé des matrices magiques. Montrer que le produit de deux matrices magiques est magique. Montrer que, dès que $n > 1$, une matrice magique n'est jamais inversible.*

Exercice d'introduction à la Réduction. *Calculer la puissance n-ième de la matrice*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

Astuce de taupin. *Soit n un naturel. Calculer la puissance n-ième de la matrice*

$$\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^0 & C_n^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_n^0 \end{pmatrix}$$