Exercices de khôlle pour la MPSI

Quinzième semaine

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.67 ± 0.30. Écart type : 2.72.

Représentations des groupes finis. *Soit G un groupe fini. Une représentation (linéaire) de G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie, et d'un morphisme $\rho: G \to GL(V)$ (où $GL(V)$ est le groupe des automorphismes de V, c'est-à-dire des applications linéaires bijectives $V \to V$). Si $g \in G$ et $x \in V$, on note $g \cdot x = (\rho(g))(x)$. Si V est une telle représentation, une sous-représentation de V est un sous-espace vectoriel W de V stable par l'action de G (i.e. $g \cdot x \in W$ dès que $g \in G$ et $x \in W$); une représentation V est dite irréductible ssi ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V. Montrer que toute toute sous-représentation W d'une représentation V admet un supplémentaire stable par G. [Indication : considérer un projecteur p quelconque d'image W, et le transformer, par un processus de moyennage, en un projecteur dont le noyau soit stable par G.] En déduire que toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles.*

Un exercice classique. *Montrer que deux sous-espaces vectoriels de même dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ont un supplémentaire commun.*

Un exercice trivial. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K. On appelle dual de E l'espace $E^* = L(E, K)$, et bidual de E l'espace $E^{**} = (E^*)^*$. Montrer que l'application $E \to E^{**}, x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$, définit un isomorphisme de E sur son bidual.*

Inégalité trirangulaire (!). *Soient f, g deux applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que*

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

Centre de $GL_n(\mathbb{R})$. *Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est le groupe des applications linéaires bijectives $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Déterminer l'ensemble Z des $f \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $fg = gf$ pour tout $g \in GL_n(\mathbb{R})$.*

Suites exactes. *Soient $E_0, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies $d_0, \ldots, d_n$, et, pour tout i, $f_i: E_i \to E_{i+1}$ une application linéaire. On dit que*

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte ssi f_0 est injective, f_{n-1} surjective, et pour tout i, $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i+1}$. Montrer que dans ces circonstances, $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i = 0$.

Introduction à la géométrie projective. *Soit E un espace vectoriel non nul sur un corps K. On appelle espace projectif associé à E l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des droites vectorielles de E (sous-espaces de dimension 1 de E). Ce sont les points de $\mathbb{P}(E)$. Si E est de dimension finie d, on dit que la dimension de $\mathbb{P}(E)$ est $d-1$. Si $F \subseteq E$, on a évidemment $\mathbb{P}(F) \subseteq \mathbb{P}(E)$, et on dit que $\mathbb{P}(F)$ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$. Un espace projectif de dimension 0 (resp. 1, resp. 2) s'appelle un point projectif (resp. une droite projective, resp. un plan projectif). Montrer que par deux points projectifs distincts passe une droite projective et une seule ; montrer que dans un plan projectif, deux droites projectives distinctent se coupent toujours en un point projectif unique.*

Un exercice étrange (et dont la faisabilité n'est absolument pas garantie). *Un espace vectoriel E est dit nœthérien (resp. artinien) ssi toute suite croissante (resp. décroissante) $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ (resp. $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots$) de sous-espaces vectoriels de E, est stationaire (i.e. constante à partir d'un certain rang). Montrer qu'un espace vectoriel est nœthérien (resp. artinien) ssi il est de dimension finie.*