# Exercices de khôlle pour la MPSI

Quatorzième semaine

*David A. Madore*
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : $14.66 \pm 0.31$. Écart type : 2.69.

**Transcendance de $e$.** *On rappelle qu'on appelle transcendant un nombre qui n'est pas racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Le but de cet exercice est de montrer que le nombre $e$ est de ce type.*

*1) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré $m$ ; on pose*

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)\,du$$

*Montrer en intégrant par parties que*

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)$$

*2) Si $\bar{f}$ est le polynôme obtenu en remplaçant chaque coefficient de $f$ par sa valeur absolue, montrer que $|I(t)| \leq |t|e^{|t|}\bar{f}(|t|)$.*

*3) On suppose par l'absurde que*

$$Q(e) = q_0 + q_1 e + \cdots + q_n e^n = 0$$

*Soit $p$ un grand nombre premier, et $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$. On pose alors $J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + \cdots + q_n I(n)$. Montrer que $J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(k)$.*

*4) Montrer que $J$ est divisible par $(p-1)!$ mais pas par $p!$. En déduire une minoration de $|J|$.*

*5) Montrer d'autre part que $|J| \leq C^p$ pour une certaine constante $C$ indépendante de $p$.*

*6) En déduire une contradiction.*

**Irrationnalité de $\pi$.** *On se propose de démontrer que le nombre $\pi$ est irrationnel. Pour cela, on suppose par l'absurde que $\pi = a/b$. Posons $p_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx-a)^n$ et $I_n = \int_0^\pi p_n(x) \sin x\,dx$.*

*1) Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

*2) Montrer que $p_n$ et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0 et $\pi$.*

*3) Montrer que $I_n$ est entier pour tout $n$.*

*4) Conclure.*

**Théorème de Riemann-Lebesgue.** *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que*

$$\int_a^b f(t)\, e^{int}\,dt \to 0$$

*lorsque $n \to +\infty$. (Indication : Commencer par le démontrer pour la fonction indicatrice d'un intervalle.)*

**Lemme de van der Corput.** *Soit $\lambda > 0$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $f'' \geq \lambda$. On va montrer qu'il existe une constante $C$ ne dépendant ni de $f$ ni de $a$ ni de $b$ telle que*

$$\left| \int_a^b e^{if(t)}\,dt \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$$

*Expliquer comment on peut se ramener à $f'(0) = 0$. On considère alors $\int_0^a e^{if(t)}dt$. Intégrer par parties sur $[x;a]$ en faisant apparaître $if'(t)$ au numérateur et au dénominateur. Estimer l'intégrale, et choisir $x$ judicieusement. Conclure.*

**Une convolution.** *Soient $\varphi, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues avec $\varphi \geq 0$ sur $[a;b]$. On suppose de plus que $\varphi$ atteint sa borne supérieure en un seul point $c \in [a;b]$. Montrer qu'alors*

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)^n\, g(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx} \to g(c)$$

*(Indications : Se ramener à $g(c) = 0$. Utiliser tout d'abord la continuité de $g$, puis découper l'intervalle $[a;b]$ en deux, les points proches de $c$ et les points loin de $c$. Pour majorer la seconde partie, on majorera le numérateur en utilisant le fait que $c$ est le seul point de $[a;b]$ où $g$ atteint sa borne supérieure et on minorera le numérateur en ne gardant que les points très, très proches de $c$.)*

**Démonstration complète** (car cet exercice est à connaître absolument) **:** Supposons $\varphi(c) = M$, de sorte que $\varphi(x) < M$ si $x \neq c$. Posons $h(x) = g(x) - g(c)$ et $I_n = \frac{\int_a^b \varphi(x)^n\, g(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $\eta > 0$ tel que si $|x - c| \leq \eta$ alors $|h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (ce qui est possible par continuité de $g$). Posons de plus $N = \sup_{[a;b]} |h|$ et $M' = \sup_{[a;b]\setminus ]c-\eta;c+\eta[} \varphi$. Puisque $[a;b]\setminus ]c-\eta;c+\eta[ = [a;c-\eta] \cup [c+\eta;b]$ (du moins si $\eta$ est assez petit, ce qu'on peut toujours supposer), $\varphi$ atteint la valeur $M'$, et donc $M' < M$. On pose alors $M'' = \frac{M+M'}{2}$ (ou, du reste, n'importe quel réel strictement compris entre $M$ et $M'$). Soit enfin $\delta > 0$ tel que si $|x - c| \leq \delta$ alors $\varphi(x) \geq M''$ (ce qui est possible par continuité de $\varphi$). On a

$$I_n = g(c) + \frac{\int_{c-\eta}^{c+\eta} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx} + \frac{\int_{\text{ailleurs}} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx}$$

Appelons $I'_n$ le second terme et $I''_n$ le troisième (bien sûr, $\int_{\text{ailleurs}}$ signifie ici $\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b$). Puisque $|h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sur $[c-\eta;c+\eta]$, on a $|I'_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour estimer $I''_n$, on note tout d'une part que

$$\left| \int_{\text{ailleurs}} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx \right| \leq N(b-a)(M')^n$$

et de l'autre que

$$\int_a^b \varphi(x)^n\, dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varphi(x)^n\, dx \geq 2\delta (M'')^n$$

Par conséquent, on a

$$|I''_n| \leq \frac{N(b-a)}{2\delta} \lambda^n$$

où $\lambda = M'/M'' < 1$. Mais alors $\lambda^n \to 0$ et il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors $|I''_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que si $n \geq n_0$, on a $|I_n - g(c)| \leq |I'_n| + |I''_n| \leq \varepsilon$ ; et donc $I_n \to g(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

**Moyennes d'une fonction.** *Soit $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x$ avec $m > 0$. Posons $S(t) = [\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^t\, dx]^{1/t}$.*

1) *Trouver $\lim_{t\to 0} S(t)$ (on utilisera un développement limité de $f(x)^t$).*
2) *Trouver $\lim_{t\to+\infty} S(t)$ (on considérera un petit intervalle autour du maximum).*
3) *Trouver $\lim_{t\to-\infty} S(t)$.*