Exercices de khôlle pour la MPSI

Douzième semaine

David A. Madore

david.madore@clipper.ens.fr

http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.64 ± 0.35. Écart type : 2.87.

Théorème de d'Alembert-Gauss. *On se propose de montrer que tout polynôme P non constant à coefficients complexes admet au moins une racine (on dit que "$\mathbb{C}$ est algébriquement clos"). Soit donc $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et supposons par l'absurde que $P(z) \neq 0$ pour tout z complexe.*

(i) *Montrer que $z \mapsto |P(z)|$ atteint sa borne inférieure (on pourra pour cela montrer que $|P(\frac{1}{t})| \to +\infty$ lorsque $t \to 0$). Soit z_0 le point où cette borne inférieure est atteinte.*

(ii) *Expliquer comment se ramener à $z_0 = 0$ et $P(0) = 1$.*

(iii) *Dans ces circonstances, considérer $P(\varepsilon e^{i\theta})$ pour ε très petit et θ jusicieusement choisi, et arriver à une contradiction.*

Résolution de l'équation générale du troisième degré ; la méthode de Cardan. *On se propose de décrire une méthode permettant de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$.*

(i) *Expliquer comment se ramener à $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.*

(ii) *Expliquer comment, par une translation, se ramener à $x^3 + px + q = 0$.*

(iii) *Résoudre l'équation en posant $z = u + v$ où $3uv = -p$.*

"L'anneau gaussien est euclidien". *On appelle entier gaussien un complexe de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose alors $f(a + ib) = a^2 + b^2$.*

(i) *Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des entiers gaussiens est un anneau (commutatif).*

(ii) *Déterminer le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.*

(iii) *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $\tilde{z} \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - \tilde{z}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.*

(iv) *Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $\alpha = \beta q + r$ avec $f(r) < f(\beta)$.*

(v) *Y a-t-il unicité de q et r ?*

(vi) *On dit que $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ est irréductible ssi, lorsque $\pi = ab$ dans $\mathbb{Z}[i]$ on a $f(a) = 1$ ou $f(b) = 1$. Montrer que $1 + i$ et 3 sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$ mais que 2 et 5 ne le sont pas.*

(vii) *Soit $a \in \mathbb{Z}[i]$: montrer qu'il existe $\pi_1, \ldots, \pi_n$ irréductibles, et $r_1 \ldots, r_n$ naturels non nuls tels que $a = \pi_1^{r_1} \cdots \pi_n^{r_n}$.*

(viii) *Montrer qu'une telle décomposition est essentiellement unique dans le sens suivant: si $a = \pi_1^{r_1} \cdots \pi_n^{r_n} = \tau_1^{s_1} \cdots \tau_m^{s_m}$ en sont deux, alors $m = n$, et quitte à réordonner les termes, on a $\tau_1 = u_1\pi_1, \ldots, \tau_n = u_n\pi_n$ avec $f(u_i) = 1$ pour tout i.*

Étude du demi-plan de Poincaré et du groupe modulaire. *On appelle demi-plan de Poincaré l'ensemble $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon \Im z > 0\}$ (où $\Im z$ est la partie imaginaire de z). On appelle groupe modulaire l'ensemble G des applications de la forme*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $ad - bc = 1$.

(i) *Montrer que le groupe modulaire est bien un groupe.*

(ii) *On appelle domaine fondamental du groupe modulaire la partie D de $\mathbb{C}$ définie par $|z| \geq 1$ et $|\Re z| \leq \frac{1}{2}$ (où $\Re z$ est la partie réelle de z). Représenter graphiquement D.*

(iii) *On se propose de montrer que pour tout $z \in \mathfrak{H}$ il existe $g \in G$ tel que $g(z) \in D$:*

a) *Justifier l'existence de $g \in G$ tel que $\Im g(z)$ soit maximum.*

b) Dans ce cas, quitte à translater par k (car $x \mapsto x+k$ est dans G), on peut supposer $|\Re g(z)| \leq \frac{1}{2}$. Montrer alors, en considérant la partie imaginaire de $-1/g(z)$, que $|g(z)| \geq 1$, soit que $g(z) \in D$

(iv) Pour $z \in \mathfrak{H}$, on s'intéresse maintenant à $\{g \in G : g(z) = z\}$, qui est un sous-groupe de G (démonstration ?), appelé le stabilisateur de z. Déterminer ce stabilisateur ; on distinguera notamment les deux cas particuliers $z = i$, $z =$ et $z = -j^2$. (Indication : On peut supposer que $\Im gz \geq \Im z$, auquel cas $|cz+d| \leq 1$.)

(v) Montrer que G est engendré par les deux éléments $z \mapsto z+1$ et $z \mapsto -1/z$.

Introduction aux réseaux elliptiques. *Considérons l'ensemble E des couples (ω_1, ω_2) de complexes non nuls tels que $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ (où $\Im$ désigne la partie imaginaire). Si $(\omega_1, \omega_2) \in E$, on définit $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \{k\omega_1 + \ell\omega_2 : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur E par $(\omega_1, \omega_2) \sim (\omega_1', \omega_2')$ ssi $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \Lambda(\omega_1', \omega_2')$. Montrer que dans ce cas, $\Im(\omega_1\bar{\omega}_2) = \Im(\omega_1'\bar{\omega}_2')$. Interprétation géométrique ?*

Exercice de coloriage. *On suppose données trois parties D_1, D_2, D_3 de $\mathbb{C}$, deux à deux disjointes et telles que $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe deux complexes z, z' appartenant à la même partie et tels que $|z - z'| = 1$.*

Introduction à la théorie de Galois. *Première partie : le tracé du pentagone. Soit $\zeta = e^{2i\pi/5}$. On pose $\omega = \zeta + \zeta^4$; calculer $\omega^2 + \omega$; en déduire la valeur de ω ; calculer $\zeta^2 - \omega\zeta$; en déduire la valeur de ζ (c'est-à-dire une expression de ζ construite à partir des entiers en prenant des sommes, différences, produits, quotients, et racines carrées). En particulier, donner la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$. Deuxième partie : le tracé du polygone à 17 côtés (Gauss, âgé de 19 ans). Soit $\zeta = e^{2i\pi/17}$. On pose $\omega = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16} + \zeta^{15} + \zeta^{13} + \zeta^9$; calculer $\omega^2 + \omega$; en déduire la valeur de ω ; on pose $\lambda = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{16} + \zeta^{13}$; calculer $\lambda^2 - \omega\lambda$; en déduire la valeur de λ ; on pose $\mu = \zeta + \zeta^{16}$; calculer $\mu^2 - \lambda\mu$; en déduire la valeur de μ ; calculer $\zeta^2 - \mu\zeta$; en déduire la valeur de ζ.*