Exercices de khôlle pour la MPSI

Onzième semaine

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Statistiques jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.51 ± 0.36. Écart type : 2.85. Meilleure note : 20. Plus mauvaise note : 08.)

DL retors. *Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de* $\arccos(1-x) - \sqrt{2x}$.

Formule de Stirling. *On considère la suite* (u_n) *donnée par*

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$$

En étudiant la nature de la série de terme général $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$, *montrer qu'il existe une constante* k *telle que*

$$n! \sim k\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$$

(lorsque $n \to +\infty$*).*

Le développement itéré du sinus. *Soit* $x \in]0;\pi[$. *On définit par récurrence la suite* (u_n) *avec* $u_0 = x$ *et* $u_{n+1} = \sin u_n$. *1) Montrer que* $u_n \to 0$. *2) Trouver la limite de* $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ *et en déduire un équivalent de* u_n.

Exercice immonde. *1) Trouver la limite* λ *quand* $x \to 0$ *de* $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}$ *(on rappelle que* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$*). 2) Trouver la limite de*

$$\frac{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} - \lambda}{x^4}$$

Exercice simplet. *Trouver la limite en* 0^+ *de*

$$\frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$$

Exercice triiiiivial. *Donner un développement limité à l'ordre 3 de* x^y *à* x *fixé pour* $y \to 0$, *puis à* y *fixé pour* $x \to 1$.

Exercice qui n'a rien, mais alors rien, à voir avec les développements limités, et qui devrait donc logiquement venir se placer dans le programme de khôlle de la semaine suivante, mais qui se trouve ici pour une raison assez simple. *On appelle* $S_n = \{\zeta^k : k = 0 \ldots n-1\}$ *(où* $\zeta = e^{2i\pi/n}$*) l'ensemble des racines* n*-ièmes de l'unité, et* $\mathcal{U}$ *le cercle unité. On considère* $f : S_n \to \mathcal{U}$ *quelconque, et* $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$. *Montrer qu'il existe* $0 \leq i, j \leq n$ *tels que*

$$|f(\zeta^i) - f(\zeta^j)| \leq |1 - \zeta^k| \leq |\zeta^i - \zeta^j|$$

(Cet exercice vous était proposé par l'École Normale Supérieure de Paris.)

Indications : On commencera a montrer qu'il existe un arc fermé I de longueur $2k\pi/n$ tel que $T := f^{-1}(I)$ soit de cardinal au moins $k+1$ (on considérera les arcs semi-ouverts de longueur $2k\pi/n$, et on en mettra n bout à bout). On montrera alors qu'il existe $\zeta^i, \zeta^j \in T$ tels que $|\zeta^i - \zeta^j| \geq |1 - \zeta^k|$ (se ramener au cas où $1 \in T$, et procéder par l'absurde en utilisant un argument de dénombrement).