Exercices de khôlle pour la MPSI

Dixième semaine

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Statistiques jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.50 ± 0.40. Écart type : 2.95. Meilleure note : 20. Plus mauvaise note : 08.)

Exercice typique. *Soient a, b deux réels vérifiant $0 < a < b$, et soit $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in]a; b[$ tel que $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$. Interprétation géométrique ?*

Exercice classique. *Soit P un polynôme non nul à coefficients entiers de degré n, et ξ une racine de P. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) distinct de ξ, on ait*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}$$

En déduire un exemple d'un nombre qui n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers (un tel nombre est dit "transcendant").

Remarque : Exercice posé à l'écrit du Concours d'entrée à la rue d'Ulm en 1995, et du Concours des Mines en 1996. Ce théorème est dû à Liouville, qui fut le premier à exhiber un nombre transcendant. Plus tard, Hermite montra la transcendance de e, et Lindemann celle de π. L'inégalité proposée ci-dessus peut être améliorée : un théorème dû à Roth, et qui valut la médaille Fields à celui-ci, affirme que n peut être remplacé par tout réel strictement supérieur à 2.

Exercice complètement délirant, que je n'oserai pas poser, mais qui peut être intéressant en, disons, six heures. *On appelle nombre 2-adique une application $\mu\colon \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ telle que $\mu(k) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de valeurs négatives de k. On appellera 0 le nombre 2-adique $k \mapsto 0$, et 1 le nombre 2-adique $0 \mapsto 1, k \mapsto 0$ si $k \neq 0$. On appelle $\mathbb{Z}_2$ l'ensemble des nombres 2-adiques, et on définit une addition sur $\mathbb{Z}_2$ de la façon suivante : si $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_2$, alors on pose $\tau(k) = 1$ (la "retenue") s'il existe $\ell < k$ tel que $\mu(\ell) = \nu(\ell) = 1$ et que pour tout m tel que $\ell < m < k$ on ait $\mu(m) = 1$ ou $\nu(m) = 1$, $\tau(k) = 0$ sinon, et on définit $(\mu + \nu)(k)$ comme valant 1 si un nombre impair des trois nombres $\mu(k), \nu(k), \tau(k)$ valent 1, et 0 sinon. On définit également une multiplication sur $\mathbb{Z}_2$, de la façon suivante : si $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_2$, alors on définit μ_k comme valant 0 si $\nu(k) = 0$, et $\mu_k(\ell) = \mu(\ell - k)$ sinon, et on pose $\sigma_r = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_r$ (avec l'addition qu'on vient de définir) ; pour tout k, la suite $\sigma_r(k)$ est constante à partir d'un certain rang (pourquoi ?), et on définit $(\mu\nu)(k)$ comme cette constante. Montrer que $\mathbb{Z}_2$, muni de ces lois, est un corps commutatif. Ceci étant, on dit qu'une suite (μ_n) de nombres 2-adiques tend vers 0 ssi pour tout k il existe n_0 tel que $\mu_n(k) = 0$ lorsque $n \geq n_0$, et on dit qu'une suite (μ_n) tend vers μ ssi $(\mu_n - \mu)$ tend vers 0. Enfin, si $f\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ est une fonction 2-adique, on dit que f est dérivable de dérivée f' ssi pour tout $\mu \in \mathbb{Z}_2$ et toute suite (μ_n) de limite μ la suite $\frac{f(\mu_n) - f(\mu)}{\mu_n - \mu}$ a pour limite $f'(\mu)$. Soit f la fonction qui a $\mu \in \mathbb{Z}_2$ associe ν défini par $\nu(2k) = \mu(k)$ et $\nu(2k+1) = 0$: montrer que f est dérivable et de dérivée nulle partout (pourtant, f n'est pas constante).*

Démonstration la plus facile du théorème de Darboux. *On se propose de montrer que la dérivée d'une fonction continue sur un segment vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Soit donc I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable. Soient $x, y \in I$, et λ compris entre $f'(x)$ et $f'(y)$. On définit φ, ψ sur $]x; y[$ par $\varphi(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$ et $\psi(t) = \frac{f(y) - f(t)}{y - t}$. Montrer que φ, ψ se prolongent par continuité à $[x, y]$, et qu'alors λ appartient à $\varphi([x, y])$ ou $\psi([x, y])$. En déduire le théorème de Darboux.*

Exercice piège-à-$***$. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle s'annulant en une infinité de points distincts. On suppose f dérivable : montrer que sa dérivée vérifie la même propriété.*

Exercice remarquable. *Soient I, J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to J$ bijective continue, de classe C^k et telle que f' ne s'annule pas sur I. Montrer alors que la réciproque f^{-1} de f est également de classe C^k.*

Fonctions à variation bornée. *Soit $I = [a; b]$ un intervalle fermé borné (avec $a < b$). On rappelle qu'une subdivision σ de I est une suite finie vérifiant $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. Pour $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de I, on pose $V_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$. De plus, on appelle $V_I(f)$ le sup (éventuellement infini) des $V_\sigma(f)$ pour σ une subdivision de I. Lorsque $V_I(f) < +\infty$, on dit que f est à variation bornée, et $V_I(f)$ s'appelle sa variation totale. Dans ces conditions, montrer que si $x < y < z$ sont trois points de I alors $V_{[x,y]}(f) + V_{[y,z]}(f) = V_{[x,z]}(f)$ (relation de Chasles). Montrer qu'une fonction C^1 (ou d'ailleurs, une fonction lipschitzienne) est à variation bornée. Montrer qu'une fonction est à variation bornée ssi elle est différence de deux fonctions monotones (pour le "seulement si", on pensera à utiliser la relation de Chasles). Montrer que toute fonction continue (ou même, dérivable) sur un compact n'est pas nécessairement à variation bornée.*

Exercice assez facile. *Soit $I = [a; b]$ un intervalle fermé borné, avec $a < b$, et $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ dérivables. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que*

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix} \neq 0$$

(on rappelle que ce déterminant vaut, par définition, $(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$).

Exercice à peu près infaisable. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un point en lequel f est dérivable.*

Exercice très intuitif. *Soit $f\colon [0; 1] \to [0; 1]^2$ une application C^1 (c'est-à-dire que $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$ avec $f_1, f_2\colon [0; 1] \to [0; 1]$ de classe C^1). Montrer que f n'est pas surjective.*

> **Remarque :** Peano a montré que la conclusion ne tient plus si on suppose seulement f continue.

Exercice infect et malheureusement classique. *Soit g une fonction réelle impaire définie et cinq fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, et x un point de cet intervalle ; montrer qu'il existe $\xi \in]0; x[$ tel que*

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi)$$

(on pourra poser $h(t) = g(t) - \frac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + a\frac{t^5}{180}$ avec a convenablement choisi, et commencer par montrer la formule avec $\frac{g^{(4)}(\zeta)}{\zeta}$ au lieu de $g^{(5)}(\xi)$). En déduire que si f est une fonction réelle définie et cinq fois dérivable sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$, alors il existe $\xi \in [a; b]$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi)$$

(Cette formule s'appelle la formule de Simpson, et sert à approcher les intégrales.)