Les 23 problèmes de Hilbert

1. L'Hypothèse du Continu de Cantor.

   Il s'agit là de l'affirmation que toute partie de $\mathbb{R}$ est équipotente, soit à $\mathbb{N}$, soit à $\mathbb{R}$, soit encore de l'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. En 1938, Gödel montrait, grâce au modèle L des ensembles constructibles, que l'Hypothèse du Continu ne peut pas être réfutée. En 1963, Cohen montrait qu'elle n'était pas non plus susceptible de démonstration.

2. La consistance des axiomes de l'arithmétique.

   L'insolubilité du problème, posé par Hilbert, de démontrer (avec des moyens très faibles) la non contradiction des axiomes de l'arithmétique, a été montrée par Gödel en 1931 avec ses théorèmes d'incomplétude. Certains résultats positifs sont toutefois apparus, notamment de Gentzen (qui prouve la consistance de l'arithmétique par une induction de longueur ε_0).

3. L'égalité des volumes de deux tétraèdres de même base et même hauteur.

   Hilbert demandait là s'il est possible de démontrer l'égalité du volume de deux tétraèdres par une décomposition en polyèdres congruents. Ce problème a été résolu par la négative dès 1900 (par Dehn). Il faut toutefois mentionner un résultat positif, et même plus positif que Hilbert ne l'attendait, le "paradoxe de Banach-Tarski" : deux polyèdres quelconques, même de volumes différents, peuvent être transformés l'un en l'autre par décomposition en un nombre fini de parties et déplacement de ces parties (les parties ne sont alors bien sûr pas Lebesgue-mesurables).

4. Le problème de la ligne droite comme le plus court chemin entre deux points.

   Ce problème demande la classification des géométries dans lesquelles la plus courte distance entre deux points est réalisée par des segments de droite.

5. Le concept d'un groupe continu de transformation sans assomption de différentiabilité.

   L'hypothèse de différentiabilité est-elle nécessaire dans la définition d'un groupe de Lie ? Ce problème a été résolu par l'affirmative en 1953 (théorème de Gleason-Montgomery-Zippin).

6. Le traitement mathématique des axiomes de la physique.

7. L'irrationnalité et la transcendance de certaines quantités.

   Hilbert pose la question de la transcendance de (toute détermination de) α^β pour α, β algébriques, β irrationnel, et $\alpha \neq 0, 1$. Ceci recouvre entre autres la transcendance de $2^{\sqrt{2}}$ et de $e^\pi = (-1)^{-i}$. Hilbert situait la solution de ce problème plus loin dans le futur que celle de la conjecture de Riemann. Ce résultat a été démontré par Gelfond, puis généralisé par Schneider et Baker.

8. Problèmes concernant les nombres premiers (dont l'Hypothèse de Riemann).

   Il s'agit là du problème classique déjà posé par Riemann : montrer que les zéros non triviaux de la fonction ζ se trouvent sur l'axe "critique" $\sigma = \frac{1}{2}$. Ce problème n'est toujours pas résolu, pas plus que ses généralisations aux fonctions ζ des corps de nombres quelconques ("hypothèse de Riemann généralisée"), qu'Hilbert envisageait déjà. Toutefois, l'analogue de la conjecture de Riemann pour les fonctions ζ des variétés algébrique a été démontrée par Pierre Deligne en 1973 grâce aux travaux d'Artin et de Grothendieck qui ont introduit la cohomologie ℓ-adique.

9. La preuve de la loi de réciprocité la plus générale dans un corps de nombres.

   Une réponse à ce problème est apporté par la loi de réciprocité d'Artin, démontrée par celui-ci en 1927. Ce théorème ouvre la voie à la théorie du corps des classes, dont le développement fut facilité par l'introduction des idèles par Chevalley en 1936.

10. La détermination de la résolubilité des équations diophantiennes.

    Il s'agit de trouver un algorithme qui détermine de façon générale si une équation diophantienne (équation polynomiale à coefficients entiers et à inconnues entières) possède une solution. Une fois formulée la thèse de Church-Turing qui définit le sens du mot "calculable", le problème était rendu rigoureux. Il fut résolu par la négative par Matiiassevitch, qui montra que tout ensemble récursivement énumérable (dans $\mathbb{N}^N$) est diophantien, c'est-à-dire peut s'écrire comme l'ensemble des $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ tels que l'équation $P(a_1, \ldots, a_N, z_1, \ldots, z_r)$ ait une solution dans $\mathbb{N}^r$, avec P un certain polynôme à coefficients entiers.

11. Le problème des formes quadratiques à coefficients algébriques quelconques.

La question est de classifier, à équivalence près, les formes quadratiques sur certains anneaux intègres (notamment $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, les corps de nombres et leurs anneaux des entiers). La classification sur $\mathbb{Q}$ fait l'objet du théorème de Hasse-Minkowski: deux formes quadratiques sont équivalentes globalement (sur $\mathbb{Q}$) ssi elles le sont localement partout (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout p). Les travaux de Siegel étudient d'autres cas.

12. L'extension du théorème de Kronecker sur les corps abéliens à n'importe quel domaine de rationalité.

? (probablement quelque chose ayant rapport avec la théorie du corps des classes).

13. La démonstration de l'impossibilité de la résolution d'équations du septième degré par des fonctions de deux arguments.

Plus généralement, il s'agit d'étudier les fonctions continues (et, en fait, les fonctions continues de trois variables) qui ne peuvent pas s'exprimer par composition à partir de fonctions continues de deux variables. En 1954, Kolmogoroff et Arnold ont montré que cette classe était vide: il existe $n(2n+1)$ fonctions continues universelles Φ_{ij} (de $[0;1]$ dans $[0;1]$) telles que pour toute fonction continue $f\colon [0;1]^n \to [0;1]$ il existe $2n+1$ fonctions continues $g_j\colon [0;1] \to [0;1]$ telles que $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} g_j(\sum_{i=1}^{n} \Phi_{ij}(x_i))$. En revanche, la question de la résolubilité de l'équation du septième degré par des fonctions *analytiques* de deux variables est encore ouverte.

14. La preuve de la finitude de certains systèmes complets de fonctions.

Le problème est le suivant : on considère un corps k et un sous-corps K de $E = k(X_1,\dots,X_n)$; on pose $R = k[X_1,\dots,X_n]$; l'anneau $K \cup R$ est-il une k-algèbre de type fini ? La réponse est négative, comme l'a montré Zariski (qui donna l'interprétation géométrique suivante : il existe une variété projective X de corps des fonctions K et un diviseur effectif D sur X tel que $K \cup R$ soit l'ensemble des fonctions de K n'ayant de pôles que sur R). Cependant, la recherche de conditions suffisantes pour la validité du résultat d'Hilbert a été source d'idées très fécondes en géométrie.

15. Une fondation rigoureuse au calcul énumératif de Schubert.

Il s'agit là de rendre rigoureux certains calculs sur les objets "en position générale" en théorie de l'intersection, et en particulier le "principe de conservation des nombres". Ce problème a donné naissance aux théorie de la multiplicité de Samuel et Grothendieck.

16. Le problème de la topologie de courbes et surfaces algébriques.

Ce problème comporte deux parties. La première concerne le nombre de branches réelles d'une courbe algébrique, et leur disposition ; de nombreux résultats modernes (Petrovski, Thom, Arnold) apportent des informations à leur sujet. La seconde partie du problème pose la question de l'existence d'un nombre maximal de cycles limite pour une équation différentielle linéaire définie par des polynômes homogènes de degré n ; cette question est encore ouverte.

17. L'expression de fonctions rationnelles positives par des carrés.

Hilbert demande si toute fonction rationnelle à coefficients réels, positive sur $\mathbb{R}^n$, est somme de carrés de fonctions rationnelles réelles. La réponse affirmative à ce problème a été apportée par Artin (qui a aussi démontré le résultat correspondant pour des coefficients rationnels). Une démonstration purement logique a été trouvée par Robinson.

18. La construction de l'espace par des polyèdres congruents.

Le problème comporte trois parties. Premièrement, montrer qu'il n'existe à isomorphisme près qu'un nombre fini de groupes discrets d'isométries de $\mathbb{R}^n$ admettant un domaine fondamental compact ; cette question fut résolue par Bieberbach en 1910. Deuxièmement, la question de l'existence de polyèdres qui ne sont pas des groupes fondamentaux, mais qui peuvent cependant paver l'espace ; de tels polyèdres furent construit par Reinhardt et Heesch dans les années trente. Troisièmement, le problème de l'empilement des sphères dans l'espace de façon à remplir le plus de volume possible : ce problème est encore ouvert.

19. L'étude de l'analyticité des problèmes "réguliers" du calcul des variations.

Il s'agit là de la question de la classe des fonctions sur lesquelles doit s'opérer l'étude des équations aux dérivées partielles.

20. Le problème général des conditions au bord.

21. La preuve de l'existence d'équations différentielles linéaires ayant un groupe de monodromie prescrit.

Toute représentation complexe de dimension finie du groupe fondamental d'un ouvert U de la sphère de Riemann peut-elle s'obtenir par action de monodromie sur une équation de Fuchs ? La réponse affirmative à cette question a été apportée par Deligne.

22. L'uniformisation de relations analytique par des fonctions automorphes.

Le résultat suivant avait été annoncé par Poincaré dès 1883, mais sa démonstration soulevait des difficultés qui ne furent résolues qu'en 1907 : toute relation analytique entre deux points de la sphère de Riemann résulte de l'élimination de la variable complexe entre deux fonctions méromorphes définies soit sur le plan complexe, soit sur le demi-plan, soit sur la sphère de Riemann.

23. Le développement ultérieur du calcul des variations.

Bibliographie

[0] David Hilbert, "Sur les problèmes futurs des mathématiques", *in* rapport du second congrès international des mathématiciens, Paris, Gauthier-Villars (1902), p. 58–114.

[1] Constance Reid, *Hilbert—Courant*, Springer.

[2] Jean-Michel Kantor, article "HILBERT (PROBLÈMES DE)", *in* Encyclopædia Universalis.

[3] Jean-Michel Kantor, article "Hilbert's Problems and Their Sequels", *in* the Mathematical Intelligencer, vol. 18, n. 1, p. 21.