Inaccessibilité et mesurabilité en théorie des ensembles

Benoît Collins

troisième exposé
9-11-1998

1 Inaccessibilité

1.1

Définition 1.1. Un cardinal κ est dit *faiblement inaccessible* ($\kappa > \omega$) ssi κ est un cardinal régulier limite, c'est-à-dire si κ est un cardinal vérifiant
• $Cf(\kappa) = \kappa$ (soit encore : pour tout $\alpha < \kappa$, une séquence $f : \alpha \to \kappa$ est bornée) et d'autre part
• κ n'est pas un cardinal successeur (ie n'est pas un nombre de Hartogs).

Un cardinal κ est dit *(fortement) inaccessible* si de plus κ est une limite forte, ie $\forall \lambda < \kappa, 2^\lambda < \kappa$. (noter qu'il existe des cardinaux fortement limite non inaccessibles).

Remarquons que sous GCH, faiblement inaccessible et fortement inaccessible sont équivalents. On peut aussi jouer avec la définition inductive suivante :

Définition 1.2. Un cardinal κ régulier est dit
• faiblement 0-inaccessible ssi κ est un cardinal régulier.
• faiblement $\alpha + 1$ -inaccessible ssi κ est une limite régulière de cardinaux α -faiblement inaccessibles.
• faiblement δ -inaccessible ssi κ est α -faiblement inaccessible pour tout $\alpha < \delta$ pour des ordinaux limite δ.

Faiblement inaccessible signifie faiblement 1-inaccessible suivant cette définition.

Cette hierarchie peut être étendue par diagonalisation en considérant les limites régulières des ξ qui sont ξ -faiblement inaccessibles.

Posons $\Lambda(X) = \{\alpha \in X \| X \cap \alpha| = \alpha\}$, pour $X \subset On$. Les cardinaux α -faiblement inaccessibles sont alors exactement les $\Lambda^\alpha(Reg)$. (où ...)

Définition 1.3. κ est dit faiblement Mahlo ssi $A = \{\rho < \kappa | \rho \, regulier\}$ est stationnaire en κ, c'est-à-dire pour tout sous-ensemble X fermé non-borné (ou bien clos-cofinal) de κ, on a $A \cap X \neq 0$.

Proposition 1.4. (Mahlo) Si κ est faiblement Mahlo, alors κ est κ -faiblement Inaccessible.

Preuve : Soit $R = \{\rho < \kappa | \rho \, regulier\}$. On construit par récurrence $C_0 = \kappa$, $C_{\alpha+1} = C_\alpha \cap R$, qui est clos cofinal car κ est faiblement Mahlo. A la limite on prend l'intersection. Par ce qui précède et par récurrence, pour $\alpha < \kappa$, $C_\alpha \cap R$ consiste en les cardinaux faiblement inaccessibles en dessous de κ, ce qui termine la preuve. □

1.2

Proposition 1.5. Suposons que κ est inaccessible. Alors
a) si $x \subset V_\kappa$ alors $x \in V_\kappa$ ssi $|x| < \kappa$.
b) $\langle V_\kappa, \in \rangle \models ZFC$.

Rappelons que $rg(x)$ est le plus petit ordinal $> rg(y)$, pour $y \in x$. De plus, $x \in V_\alpha$ ssi $rg(x) < \alpha$.

Preuve : (a) Dans le sens direct, il suffit de montrer que $|V_\alpha| < \kappa$ pour $\alpha < \kappa$. Ceci se montre immédiatement par induction sur α. Réciproquement, supposons que $x \subset V_\kappa$ avec $|x| < \kappa$. Par la régularité de κ, $\{rang(y) | y \in x\} \subset \alpha$ pour un $\alpha < \kappa$, et donc $x \in V_{\alpha+1} \subset V_\kappa$.

(b) Tous les axiomes de ZFC sauf l'axiome de remplacement sont vérifiés pour tout ordinal limite $\alpha > \omega$. (voir l'exposé de David) Pour vérifier le remplacement pour V_κ, supposons que $x \in V_\kappa$. Soit $F : x \to V_\kappa$ une fonction. Alors par remplacement, $F''x$ existe dans V. De plus on a $|F''x| \leq |x| < \kappa$ et donc d'après (a), $F''x \in V_\kappa$. □

Notons ZFC^2 la version du second ordre de ZFC, c'est-à-dire que le schéma de remplacement est remplacé par un seul axiome avec un quantificateur universel du second ordre. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.6. κ est inaccessible ssi V_κ modélise ZFC^2.

Preuve : Dans le sens direct, voire la proposition précédente.
Pour la réciproque, remarquons d'abord que κ est régulier : en effet, sinon il existerait un $\alpha < \kappa$ et une fonction $G : \alpha \to \kappa$ non-bornée dans κ. Mais $G \subset V_\kappa$, et par remplacement du second ordre (appliqué à la fonction G sans expliciter la formule par laquelle elle est définie) , on aurait $G''\alpha \in V_\kappa$, donc $Sup(G''\alpha) = \kappa \in V_\kappa$ (puisque les ordinaux sont absolus et que le *sup* d'un ensemble d'ordinaux est un ordinal), ce qui constitue une contradiction.
Il reste à établir que κ est un cardinal fortement limite. Si tel n'était pas le cas, il existerait un $\lambda < \kappa$ tel que $2^\lambda \geq \kappa$. Mais d'apres l'axiome de l'ensemble des parties, $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa$, et il existerait une surjection $H : \mathcal{P}(\lambda) \to \kappa$. A nouveau par le remplacement du second ordre, $H''\mathcal{P}(\lambda) = \kappa \in V_\kappa$, ce qui fournit une contradiction. □

Remarquons que les seuls modèles de ZFC^2 sont les V_κ, alors qu'il existe beaucoup d'autres modèles de ZFC (par exemple L).

Définition 1.7. κ est (fortement) Mahlo ssi $\{\alpha < \kappa | \alpha \, est \, inaccessible\}$ est stationnaire en κ.

2 Mesurabilité

2.1

L'existence de cardinaux mesurables provient de problèmes liés à l'existence on non de parties de $\mathbb{R}$ non mesurables au sens de Lebesgue.

Proposition 2.1. Avec AC, on peut montrer l'existence de parties non mesurables de $\mathbb{R}$.

Preuve : Par exemple, on choisit un représentant borné dans $\mathbb{R}$ du groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. □

Définition 2.2. Un ensemble S est dit *muni d'une mesure* (σ -additive) s'il est muni d'une application $m : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ vérifiant :
i)$m(S) = 1$
ii)$m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in S$ et
iii)pour des $\{X_n | n \in \omega\} \subset \mathcal{P}(S)$ deux-à-deux disjoints, on a $m(\cup_n X_n) = \Sigma_n m(X_n)$.

On cite les deux lemmes suivants qui nous serviront dans la suite.

Lemme 2.3. Si $T \subset \{X \subset S | m(X) > 0\}$ est indénombrable, alors il existe $Y, z \in T$ distincts tels que $m(Y \cap Z) > 0$

Preuve : En effet, pour un certain $n \in \omega$, on va avoir que $\{X \in T | m(X) > \frac{1}{n}\}$ est indénombrable. Nécessairement, deux d'entre eux seront alors d'intersection non vide. □

On dit que n est λ *-additive* ssi pour tout $\gamma < \lambda$ et pour une famille d'ensembles deux-à-deux disjoints $\{X_\alpha | \alpha < \gamma\} \subset \mathcal{P}(S)$, $m(\cup_\alpha X_\alpha) = \Sigma_\alpha m(X_\alpha)$ (la somme est prise au sens des familles sommables).

Lemme 2.4. Soit κ le plus petit cardinal mesurable. Alors toute mesure sur κ est κ -additive.

Preuve : Si tel n'est pas le cas, soit m une mesure sur κ, $\gamma < \kappa$, et $\{X_\alpha | \alpha < \gamma\} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ une famille d'ensembles deux-à-deux disjoints tels que $m(\cup_\alpha X_\alpha) \neq \Sigma_\alpha m(X_\alpha)$. Alors on a $\gamma > \omega$ et il n'y a qu'un nombre dénombrable de α tels que $m(X_\alpha) > 0$ d'après le lemme précédent. En enlevant ces derniers par la propriété d'additivité (iii), on peut supposer sans perte de généralité que chacun des $m(X_\alpha) = 0$, et que $m(\cup_\alpha X_\alpha) = r > 0$. IL ne reste alors plus qu'à vérifier que $m' : \mathcal{P}(\gamma) \to [0,1]$ définie par :

$$m'(Y) = \frac{m(\cup_{\alpha \in Y} X_\alpha)}{r}$$

est une mesure sur γ, contredisant la minimalité de κ. □

On dit qu'un cardinal κ est $\mathbb{R}$ *-mesurable* ss'il existe une mesure κ -additive sur κ. Remarquons qu'un tel cardinal est nécessairement régulier. En effet sinon on prend pour $\alpha < \kappa$ une fonction croissante non-bornée $f : \alpha \to \kappa$; l'un f_β va être de mesure strictement positive, contradiction... car un sous-ensemble borné est normalement de mesure nulle (car les singletons sont de mesure nulle).

On introduit maintenant un outil combinatoire très puissant connu sous le nom de "matrice d'Ulam". On note λ^+ le premier cardinal strictement supérieur à λ.

Proposition 2.5. Pour tout λ cardinal , il existe une collection d'ensembles $\{A^\xi_\alpha | \alpha < \lambda^+, \xi < \lambda\} \subset \mathcal{P}(\lambda^+)$ satisfaisant

(a)$A^\xi_\alpha \cap A^\xi_\beta = \emptyset$ dés que $\alpha < \beta < \lambda^+$ et $\xi < \lambda$, et
(b)$|\lambda^+ - \cup_{\xi<\lambda} A^\xi_\alpha| < \lambda$ pour tout $\alpha < \lambda^+$

Preuve : Pour tout $\eta < \lambda$, soit $f_\eta : \lambda \to \eta + 1$ une fonction surjective, et pour $\alpha < \lambda^+$, posons $A^\xi_\alpha = \{\eta < \lambda^+ | f_\eta(\xi) = \alpha\}$. Alors (a) est immédiat et pour (b), il suffit de remarquer que $(\lambda^+ - \cup_{\xi<\lambda} A^\xi_\alpha) \subset \alpha$. $\square$

On a alors le corollaire suivant :

Proposition 2.6. Si κ est $\mathbb{R}$ -mesurable, alors κ est faiblement inaccessible.

Preuve : Comme κ est régulier, il reste à établir que κ est un cardinal limite. Supposons au contraire que $\kappa = \lambda^+$, et considérons une matrice d'Ulam (comme dans la prop. précédente). Soit m une mesure κ -additive sur κ. alors pour tout $\alpha < \lambda^+$, il existe un $\xi_\alpha < \lambda$ tel que $m(A^{\xi_\alpha}_\alpha) > 0$ d'après (b). Mais alors il doit y avoir un $\xi < \lambda$ fixé pour lequel $\xi_\alpha = \xi$ pour un nombre λ^+ de α, ce qui contredit notre lemme ci-dessus. $\square$

Une mesure sur X est dite avoir un *atome* s'il existe un sous-ensemble $A \subset X$ pour lequel $m(A) > 0$ et pour tout $Y \subset A$, on a soit $m(Y) = 0$, soit $m(Y) = A$. Sinon, la mesure est dite *sans atome.*

Théorème 2.7. (Ulam) Supposons qu'il existe une mesure m sans atome κ -additive sur κ. Alors
a) $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.
b) Il existe une mesure sur les réels étendant la mesure de Lebesgue.

Lemme 2.8. (i) Pour tout $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$ et $X \subset \kappa$, il existe un $Y \subset X$ vérifiant $0 < m(Y) < \epsilon$.
(ii) Pour tout $X \subset \kappa$, il existe un $Y \subset X$ vérifiant $m(Y) = \frac{1}{2}m(X)$.

Preuve : (i) Il suffit de définir récursivement une suite déscendante pour l'inclusion d'ensembles X_i satisfaisant $0 < m(X_{i+1}) \leq \frac{1}{2}m(X)$ pour tout $i \in \omega$. Mais étant donné X_i, comme m est sans atome, il existe une partition $A \cap B = X_i$ telle eque $0 < m(A) \leq m(B)$. On pose alors $X_{i+1} = A$.
(ii) On définit récursivement une séquence décroissante d'ensembles X_α tels que $m(X_\alpha) \geq \frac{1}{2}m(X)$ de la manière suivante : on pose $X_0 = X$, puis étant donné X_α, on construit $X_{\alpha+1}$ vérifiant $X_{\alpha+1} \subset X_\alpha$ et $\frac{1}{2}m(X) \leq m(X_{\alpha+1}) < m(X_\alpha)$, ce qui est possible par (i). Pour un ordinal limite, on prend $X_\delta = \cap_{\alpha<\delta} X_\alpha$. Il devient alors facile de voir qu'il existe nécéssairement un $\alpha < \omega_1$ pour lequel $m(X_\alpha) = \frac{1}{2}m(X)$... $\square$

On remarque qu'on identifiera toujours l'ensemble $[0, 1]$ à ${}^\omega\omega$ de la manière suivante (on l'identifie à $[0, 1] - dyadiques$). On peut maintenant prouver le théorème.

Preuve : Pour toute suite finie d'entiers $s \in {}^{<\omega}\omega$, on définit les ensembles $X_s \subset \kappa$ de la manière suivante : on pose $X_\emptyset = \kappa$, et étant donné X_s, on utilise le lemme précédent pour construire des ensembles $X_{s\sim\langle i\rangle}$ pour $i \in \omega$, de telle sorte que $X_s = \cup_{i\in\omega} X_{s\sim\langle i\rangle}$ est une union disjointe et que $m(X_{s\sim\langle i\rangle}) = 2^{-(i+1)}m(X_s)$.

Pour tout $f \in {}^\omega\omega$, posons $Y_f = \cap_n X_{f|n}$, de telle sorte que $m(Y_f) = 0$. D'autre part $\kappa = \cup\{Y_f | f \in \omega^\omega\}$, donc m ne peut être $(2^{\aleph_0})^+$ -additive, d'où le (a).

Pour (b), posons $\mu : \mathcal{P}({}^\omega\omega) \to [0, 1]$ définie par

$$\mu(A) = m(\cup\{Y_f | f \in A\})$$

. μ est une mesure κ -additive sur ω^ω. D'autre part, par construction de X_s, pour $s \in {}^{<\omega}\omega$, on a

$$\mu(O(s)) = m(X_s) = \Pi_{i<|s|} 2^{-(s(i)+1)} = m_L(O(s))$$

Donc μ et m_L coincident sur la tribu de Lebesgue (les mesures coïncident sur des générateurs de la tribu borélienne et sont décroissantes).

$\square$

Ce théorème justifie l'interêt de l'existence de cardinaux faiblement inaccessibles de cardinal plus petit que $2^{\aleph_0}$, donc de la négation de l'hypothèse du continu.

Finalement, on est dans la situation suivante : soit on a une mesure non-atomique et le cardinal κ est somme toute petit, soit on a une mesure atomique et son atome A a le même cardinal que κ. On se ramène alors à l'étude d'une mesure sur κ qui vaut $0-1$ en considérant $\mu'(X) = \frac{\mu(X \cap A)}{\mu(A)}$.

Un filtre est dit λ -complet ss'il est stable par toute intersection de cardinal $< \lambda$. On a alors la caractérisation facile :

Proposition 2.9. Un ultrafiltre U est λ -complet ssi pour tout $\gamma < \lambda$ et $\cup\{Y_\alpha | \alpha < \gamma\} \in U$, il existe un $\alpha < \gamma$ pour lequel $Y_\alpha \in U$

On a alors la définition : κ est *mesurable* ss'il existe un ultrafiltre κ -complet sur κ. κ va aussi être $\mathbb{R}$ -mesurable : il suffit de donner à un élément de U la mesure 1 et 0 sinon. Ceci justifiera l'emploi dans la suite du terme 'presque sûrement' pour faire allusion à une propriété vraie sur un ensemble de U. Remarquons aussi que U n'a pour éléments que des sous-ensembles non-bornés de κ.

Théorème 2.10. Si κ est mesurable, alors κ est inaccessible.

Preuve : Il suffit d'établir que κ est une limite forte. Supposons que U est un ultrafiltre κ -complet sur κ et que $\lambda < \kappa$. Il suffit d'établir que U doit alors être $(2^\lambda)^+$ -complet. A cette fin, supposons que $\{X_f | f \in 2^\lambda\} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ avec $\cup\{X_f | f \in 2^\lambda\} \in U$. Mais alors pour tout $\alpha < \lambda$, il y a un $i_\alpha < 2$ tel que $T_\alpha = \cup\{X_f | f(\alpha) = i_\alpha\} \in U$. Par κ -complétude, $\cap_{\alpha<\lambda} T_\alpha = X_g$, où $g : \lambda \to 2$ est donnée par $g(\alpha) = i_\alpha$, ce qui termine la preuve. $\square$

2.2

Dans ce paragraphe, on va montrer un résultat important dû à Scott qui stipule que s'il existe un cardinal mesurable, alors $V \neq L$.

On rappelle brièvement ce qu'est une ultrapuissance, un modèle intérieur, et un plongement élémentaire.

Si X est une classe, et U un ultrafiltre sur un ordinal κ, on dit que $Ult(X, U) = X^U$ / "être égal sur un sous-ensemble de κ élément de U" est *l'ultrapuissance* de X relativement à U.

On dit que M est un *modèle intérieur* ssi M est un $\in$ -modèle transitif sur ZF avec $On \subset M$. L est le plus petit modèle intérieur -il est absolu dans le sens où pour tout autre modèle M, on a $L^M = L \cap M$.

Pour deux structures $\mathcal{M}_0 = \langle M_0, ...\rangle$ $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, ...\rangle$, on dit que j est une *application élémentaire* de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{M}_1$ et on note $j : \mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$ si $j : M_0 \to M_1$ et si pour toute formule $\phi(v_1, ..., v_n)$, on a $\mathcal{M}_0 \vDash \phi[x_1, ..., x_n]$ ssi $\mathcal{M}_1 \vDash \phi[j(x_1), ..., j(x_n)]$

Proposition 2.11. Supposons que M_0 et M_1 sont des modéles intérieurs et que $j : M_0 \prec M_1$. Alors : pour tout ordinal α , $j(\alpha)$ est un ordinal $\geq \alpha$.

On a alors le théorème technique suivant (de Los) :

Théorème 2.12. Pour U un ultrafiltre sur un ensemble X, $V \prec Ult(V, U)$ est un plongement élémentaire.

On dit que xE_Uy ssi presque sûrement (ie pour un ensemble d'indices i de U) $x_i \in y_i$.

Proposition 2.13. Si U est ω_1 complet alors E_U est bien-fondé

Preuve : Supposons que $f_0, ..., f_n, ...$ est une suite E_U -décroissante. Alors pour tout n, $X_n = \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$ est dans U. Comme U est ω_1 complet, $X = \cap_{n\in\omega} X_n$ est dans U, donc non-vide. Soit $x \in X$. Alors on a une suite infinie $f_0(x) \ni f_1(x) \ni ...$, contradiction. □

Donc par le théorème d'écrasement de Mostowski, il existe une bijection isomorphe $\pi : Ult \to M$ avec M un modéle transitif intérieur. Désormais on est muni d'un plongement élémentaire $j : V \prec M$. On a alors la proposition :

Proposition 2.14. Si U est un ultrafiltre κ -complet sur un cardinal mesurable κ avec pour application correspondante $j : V \prec M = Ult(V, U)$, alors κ est le plus petit ordinal tel que $j(\kappa) > \kappa$.

Preuve : Dans un premier temps, observons que $j(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha < \kappa$. En effet, sinon soit $\alpha < \kappa$ le plus petit ordinal tel que $j(\alpha) > \alpha$. Si $[f] = \alpha$, alors $[c_\alpha] = j(\alpha) > \alpha = [f]$, ce qui signifie $\{\xi < \kappa | f(\xi) < \alpha\} \in U$, et donc par κ -complétude, il existe un $\beta < \alpha$ tel que $\{\xi < \kappa | f(\xi) = \beta\} \in U$. Mais alors $[f] = j(\beta) = \beta$; contradiction. Ensuite, puisque U est κ -complet, il ne contient aucun sous-ensemble borné de κ. Donc, avec $id : \kappa \to \kappa$, pour tout $\alpha < \kappa$, $\{\xi | \alpha < \xi < \kappa\} \in U$ entraîne que $\alpha = j(\alpha) < [id] < j(\kappa)$. D'où $\kappa \leq [id] < j(\kappa)$ et $\kappa = crit(j)$. □

Théorème 2.15. S'il existe un cardinal mesurable, alors $V \neq L$.

Preuve : Supposons que κ est le plus petit cardinal mesurable, et que $V = L$. Alors par élémentarité M est un modèle intérieur satisfaisant l'axiome de constructibilité, donc $M = L$. Mais aussi par élémentarité, $M \vDash (j(\kappa)$ est le plus petit cardinal mesurable), ce qui contredit $j(\kappa) > \kappa$.

□