Introduction à la géométrie algébrique

1. Variétés algébriques affines.

Dans tout ce qui suit, k désignera un corps algébriquement clos, donc infini.

Soit n un naturel. L'espace vectoriel k^n s'appellera *espace affine à n dimensions sur le corps k*. On notera de plus $k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$ la k-algèbre des polynômes à n variables, appelée encore *algèbre des polynômes sur k^n* (ou parfois *algèbre structurelle de k^n* pour des raisons qui devraient devenir claires ultérieurement). Naturellement, si $f \in k[X]$ et $x \in k^n$, avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on pose $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, ce qui permet de considérer les éléments de $k[X]$ comme des fonctions sur k^n. Pour que cette identification soit morale, il faut noter le résultat suivant qui devra bien être démontré quelque part, alors autant que ce soit maintenant.

Proposition 1.1. *Si $f \in k[X]$, et $f(x) = 0$ pour tout $x \in k^n$ alors $f = 0$. Autrement dit, le morphisme de k-algèbre qui envoie un élément f de $k[X]$ sur la fonction sur k^n qui lui est canoniquement associée, est injectif.*

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Si $n = 0$, la proposition est triviale. Supposons donc $n > 0$ et l'hypothèse de récurrence vérifiée (pour le rang $n - 1$). On ordonne alors f selon les puissances croissantes de x_n :

$$f = f_0 + f_1 x_n + \cdots + f_s x_n^s$$

où $f_0, \ldots, f_s$ sont des éléments de $k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Si $x_1, \ldots, x_{n-1} \in k$ alors

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, X) = f_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \cdots + f_s(x_1, \ldots, x_{n-1})\, X^s$$

considéré comme polynôme d'une seule variable X, s'annule sur tout k, lequel est infini. Il s'ensuit que ce polynôme est nul. Par conséquent, $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq s$. Ceci étant vrai pour tous $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $f_0, \ldots, f_s$, qui sont donc nuls. Il s'ensuit que f est nul.

Lorsque $f \in k[X]$, $x \in k^n$ et que $f(x) = 0$, on dit que x est un *zéro* de f, ou que x *annule* f.

Si B est une partie quelconque de $k[X]$, on définit

$$\mathrm{Var}(B) := \{x \in k^n \colon \forall f \in B (f(x) = 0)\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs à tous les éléments de B : on l'appelle la *variété algébrique affine définie par B*. Si $B = \{f_1, \ldots, f_n\}$, on note $\mathrm{Var}(B) =: \mathrm{Var}(f_1, \ldots, f_n)$ (et on fera des conventions semblables pour toutes les autres fonctions du même calibre qui seront introduites plus loin).

Tout d'abord, une remarque évidente : l'application $\mathrm{Var}\colon \mathcal{P}(k[X]) \to \mathcal{P}(k^n)$ (où, naturellement, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E) est décroissante pour l'inclusion.

On notera de plus $\mathrm{Idé}(B)$ l'idéal de $k[X]$ (ou, d'ailleurs, lorsque le cas se présentera plus loin, d'un anneau quelconque) engendré par B. On rappelle que $\mathrm{Idé}(B)$ est l'intersection de tous les idéaux de $k[X]$ contenant B ; c'est aussi l'ensemble des éléments de $k[X]$ de la forme $f = h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s$ où $f_1, \ldots, f_s \in B$ et $h_1, \ldots, h_s \in k[X]$.

Proposition 1.2. *Si $B \subseteq k[X]$ alors $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{Var}(\mathrm{Idé}(B))$.*

Démonstration : Comme $B \subseteq \mathrm{Idé}(B)$ et que Var est décroissante, on a $\mathrm{Var}(B) \supseteq \mathrm{Var}(\mathrm{Idé}(B))$. Posons à présent $x \in \mathrm{Var}(B)$. Pour $f \in \mathrm{Idé}(B)$, on peut écrire $f = h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s$ avec les notations décrites plus haut. Alors, on a $f_i(x) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq s$, et donc $f(x) = 0$. Ceci montre $x \in \mathrm{Var}(\mathrm{Idé}(B))$, et on a donc montré que $\mathrm{Var}(B) \subseteq \mathrm{Var}(\mathrm{Idé}(B))$. On a donc $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{Var}(\mathrm{Idé}(B))$.

On peut donc se limiter à l'étude des $\mathrm{Var}(I)$ où I est un idéal de $k[X]$. Explicitons un peu : si on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux de $k[X]$, et $\mathcal{V}$ l'ensemble des variétés algébriques affines (c'est-à-dire l'image de $\mathcal{P}(k[X])$ par Var) alors la proposition 1.2 implique que Var se restreint en une application <u>surjective</u> de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{V}$.

On rappelle que si I et J sont des idéaux d'un anneau commutatif, alors $IJ := \{uv : u \in I, v \in J\}$ en est un, et que $IJ \subseteq I \cap J$ Si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille d'idéaux d'un anneau commutatif, alors

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda(\mathrm{pqn})} x_\lambda : \forall\lambda\in\Lambda(x_\lambda \in I_\lambda) \right\}$$

en est aussi un ((pqn) signifiant que la somme est presque nulle).

Proposition 1.3. *Si $I, J \in \mathcal{I}$, alors* $\mathrm{Var}(IJ) = \mathrm{Var}(I) \cup \mathrm{Var}(J)$.

Démonstration : Si $x \in \mathrm{Var}(I)$ alors $f(x) = 0$ pour tout $f \in I$, donc $(fg)(x) = (f(x))(g(x)) = 0$ pour tous $f \in I, g \in J$, et par suite $x \in \mathrm{Var}(IJ)$; de même si $x \in \mathrm{Var}(J)$. Ainsi, $\mathrm{Var}(IJ) \supseteq \mathrm{Var}(I) \cup \mathrm{Var}(J)$. Réciproquement, supposons $x \in \mathrm{Var}(IJ)$ et $x \notin \mathrm{Var}(J)$. Alors il existe $g \in J$ tel que $g(x) \neq 0$. Mais alors pour tout $f \in I$, on a $(fg)(x) = 0$ et par suite $f(x) = 0$, ce qui montre $x \in \mathrm{Var}(I)$. Ainsi, $\mathrm{Var}(IJ) \subseteq \mathrm{Var}(I) \cup \mathrm{Var}(J)$.

Proposition 1.4. *Si $I, J \in \mathcal{I}$, alors* $\mathrm{Var}(I \cap J) = \mathrm{Var}(I) \cup \mathrm{Var}(J)$.

Démonstration : D'une part, $I \cap J \subseteq IJ$ donc $\mathrm{Var}(I \cap J) \supseteq \mathrm{Var}(IJ)$, soit, vu 1.3, $\mathrm{Var}(I \cap J) \supseteq \mathrm{Var}(I) \cup \mathrm{Var}(J)$. Mais d'autre part, $I \subseteq I \cap J$ donc $\mathrm{Var}(I) \supseteq \mathrm{Var}(I \cap J)$, et de même $\mathrm{Var}(J) \supseteq \mathrm{Var}(I \cap J)$, donc $\mathrm{Var}(I \cap J) \subseteq \mathrm{Var}(I) \cup \mathrm{Var}(J)$. Dans l'ensemble, $\mathrm{Var}(I \cap J) = \mathrm{Var}(I) \cup \mathrm{Var}(J)$.

Par ailleurs, le résultat suivant est immédiat d'après les définitions :

Remarque 1.5. *Pour toute famille $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de parties de $k[X]$, on a* $\mathrm{Var}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Var}(B_\lambda)$.

Comme $\mathrm{Idé}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Idé}(B_\lambda)$, on déduit de 1.2 et 1.5 :

Proposition 1.6. *Pour toute famille $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'idéaux de $k[X]$, on a* $\mathrm{Var}(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Var}(I_\lambda)$.

On a alors

Résultat et définition 1.7. *L'ensemble des variétés algébriques affines de k^n forme l'ensemble des fermés pour une certaine topologie de k^n. Celle-ci se nomme topologie de Zariski de k^n.*

Démonstration : L'ensemble vide et l'ensemble plein sont bien des variétés algébriques affines car $\mathrm{Var}(k[X]) = \emptyset$ et $\mathrm{Var}(\{0\}) = k^n$. Toute intersection de variétés algébriques affines en est une d'après 1.6, et même chose pour les unions finies d'après 1.4 (ou 1.3).

Désormais, sauf mention expresse du contraire, k^n sera toujours supposé muni de sa topologie de Zariski ; lorsque $k = \mathbb{C}$, la topologie "ordinaire" de k^n s'appelle *topologie transcendante* de celui-ci. On notera que, comme les polynômes sont continus pour la topologie transcendante, les variétés algébriques affines sont des fermés transcendants, et par conséquent la topologie de Zariski est plus grossière que la topologie transcendante. Il n'est pas difficile de voir, et nous allons démontrer plus fort plus loin, qu'elle est strictement plus grossière (pour $n \geq 1$).

On rappelle qu'un espace topologique est dit T_1 (ou *accessible*) lorsque tous les singletons y sont fermés, T_2 (ou *séparé*, ou *Hausdorff*) lorsque deux points distincts ont des voisinages disjoints. On dira de plus qu'un espace topologique est *irréductible* lorsque deux ouverts non vides quelconques se rencontrent, soit lorsque tous les ouverts non vides sont denses, soit lorsque tous les fermés non pleins sont d'intérieur vide, soit lorsque l'espace n'est pas la réunion de deux fermés non pleins. Il est clair qu'un espace topologique séparé et irréductible est vide ou réduit à un point.

Proposition 1.8. *k^n (muni de sa topologie de Zariski) est irréductible et T_1. En particulier, pour $n \geq 1$, il n'est pas T_2.*

Démonstration : Tout d'abord, l'espace est T_1 : cela vient de ce que

$$\mathrm{Var}(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n) = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$$

ce qui montre que $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$ est fermé. Ensuite, irréductible. Soient F et G deux fermés distincts de k^n. On peut alors écrire $F = \mathrm{Var}(I)$ et $G = \mathrm{Var}(J)$ où $I, J \in \mathcal{I}$ (i.e. I, J sont deux idéaux de $k[X]$). Mais alors $I \neq \{0\}$ et $J \neq \{0\}$, trivialement. Il s'ensuit (comme $k[X]$ est intègre) que $IJ \neq \{0\}$, et alors 1.1 montre que $\mathrm{Var}(IJ) \neq k^n$ (car si $f \in IJ \setminus \{0\}$, f ne s'annule pas partout). Autrement dit, vu 1.3, $F \cup G \neq k^n$. Ceci montre l'irréductibilité.

2. Idéal d'une variété algébrique affine.
Si $C \subseteq k^n$ cette fois, on définit :

$$Nul(C) := \{f \in k[X]: \forall x \in C(f(x) = 0)\}$$

Il est immédiat de vérifier que $Nul(C)$ est un idéal de $k[X]$. Par ailleurs, l'application Nul est clairement décroissante.

Proposition 2.1.
(i) Pour $C \subseteq k^n$, on a $C \subseteq \mathrm{Var}(Nul(C))$.
(ii) Pour $B \subseteq k[X]$, on a $B \subseteq Nul(\mathrm{Var}(B))$.
(iii) Pour $C \subseteq k^n$, on a $Nul(C) = Nul(\mathrm{Var}(Nul(C)))$.
(iv) Pour $B \subseteq k[X]$, on a $\mathrm{Var}(B) = \mathrm{Var}(Nul(\mathrm{Var}(B)))$.

Démonstration : (i) : Si $x \in C$, on a $f(x) = 0$ pour tout $f \in Nul(C)$, autrement dit $x \in \mathrm{Var}(Nul(C))$. Ceci montre $C \subseteq \mathrm{Var}(Nul(C))$. (ii) : Si $f \in B$, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Var}(B)$, autrement dit $f \in Nul(\mathrm{Var}(C))$. Ceci montre $B \subseteq Nul(\mathrm{Var}(B))$. (iii) : De (i) et de la décroissance de Nul on tire $Nul(C) \supseteq Nul(\mathrm{Var}(Nul(C)))$; mais de (ii) appliquée à $Nul(C)$ on tire $Nul(C) \subseteq Nul(\mathrm{Var}(Nul(C)))$, d'où le résultat. (iv) : De même.

Notons $\mathcal{I}_V$ l'image de Nul (i.e. l'image de $\mathcal{P}(k^n)$ par l'application Nul). On a déjà remarqué $\mathcal{I}_V \subseteq \mathcal{I}$. De 2.1(iii) il s'ensuit que $\mathcal{I}_V$ est aussi l'image de $\mathcal{V}$ (l'ensemble des variétés algébriques affines de k^n) par Nul.

Si $V \in \mathcal{V}$, alors 2.1(iv) montre que $\mathrm{Var}(Nul(V)) = V$. Par suite, la restriction de Var à $\mathcal{I}_V$ est encore surjective (sur $\mathcal{V}$), et la restriction de Nul à $\mathcal{V}$ est injective. Si $I \in \mathcal{I}_V$ alors 2.1(iii) montre que $Nul(\mathrm{Var}(I)) = I$. Par suite, la restriction de Var à $\mathcal{I}_V$ est injective (dire que la restriction de Nul à $\mathcal{V}$ est surjective sur $\mathcal{I}_V$ n'apporterait pas grand chose, car c'est précisément la définition de $\mathcal{I}_V$). Notons que Var n'est, pour $n \geq 1$, pas injective sur $\mathcal{I}$ tout entier (par exemple, $\mathrm{Var}(X_1^2) = \mathrm{Var}(X_1)$, d'ailleurs en général si $I \in \mathcal{I}$ alors $\mathrm{Var}(I^2) = \mathrm{Var}(I)$). Evitons de perdre totalement pied, reprenons :

Récapitulation 2.2. $\mathrm{Var}: \mathcal{I}_V \to \mathcal{V}$ *et* $Nul: \mathcal{V} \to \mathcal{I}_V$ *sont deux bijections réciproques. En revanche,* $\mathrm{Var}: \mathcal{I} \to \mathcal{V}$*, évidemment surjective, n'est pas injective en général. Et* $Nul: \mathcal{V} \to \mathcal{I}$*, évidemment injective, n'est pas surjective en général. On a* $\mathrm{Var}(\{0\}) = k^n$ *et* $\mathrm{Var}(k[X]) = \emptyset$*. On a montré en 1.1 que si* $I \in \mathcal{I}$ *avec* $\mathrm{Var}(I) = k^n$*, alors* $I = \{0\}$ *(et en particulier,* $Nul(k^n) = \{0\}$*). Comme* $Nul(\emptyset) = k[X]$*, si* $I \in \mathcal{I}_V$ *avec* $\mathrm{Var}(I) = \emptyset$ *alors* $I = k[X]$*.*

La dernière affirmation est encore vraie si on suppose simplement $I \in \mathcal{I}$, mais c'est loin d'être évident ; en effet, c'est une des formulations du Nullstellensatz (le Nullstellensatz faible). Pour l'instant, tout ce que nous avons dit reste vrai si on suppose simplement que k est infini, mais le Nullstellensatz ne l'est pas : pour $k = \mathbb{R}$, $n = 2$, $I = \mathrm{Idé}(X_1^2 + X_2^2 + 1)$, on a $\mathrm{Var}(I) = \emptyset$ sans que $I = \mathbb{R}[X_1, X_2]$ (et on en déduit incidemment $I \notin \mathcal{I}_V$).

A propos, voici un résultat trivial :

Remarque 2.3. *Pour toute famille* $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de parties de* k^n*, on a* $Nul(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Nul(C_\lambda)$*.*

(Tout simplement parce qu'un polynôme s'annule sur l'union des C_λ si et seulement s'il s'annule sur chacun d'entre eux.)

Nous nous penchons maintenant plus précisément sur les relations entre Nul et Var, autrement dit, que valent $\mathrm{Var}(Nul(\cdot))$ et $Nul(\mathrm{Var}(\cdot))$? Pour le premier, c'est facile :

Proposition 2.4. *Pour tout* $C \subseteq k^n$*, on a* $\mathrm{Var}(Nul(C)) = \bar{C}$ *(où* $\bar{C}$ *est l'adhérence de* C *pour la topologie de Zariski). D'après 2.1(iii), on en déduit* $Nul(C) = Nul(\bar{C})$ *(comparer 1.2).*

Démonstration : $\mathrm{Var}(Nul(C))$ est un fermé contenant C (2.1(i)) donc aussi $\bar{C}$; autrement dit $\bar{C} \subseteq \mathrm{Var}(Nul(C))$. Mais d'autre part, $\bar{C} \supseteq C$, donc $Nul(\bar{C}) \subseteq Nul(C)$, donc $\mathrm{Var}(Nul(\bar{C})) \supseteq \mathrm{Var}(Nul(C))$; comme $\bar{C} \in \mathcal{V}$, d'après 2.2 on a $\mathrm{Var}(Nul(\bar{C})) = \bar{C}$; ainsi, $\bar{C} \supseteq \mathrm{Var}\, Nul(C))$. On a terminé.

Pour $Nul(\mathrm{Var}(\cdot))$, il va faloir suer un peu plus.

3. Idéaux radicaux et le Nullstellensatz.

Si I est un idéal d'un anneau commutatif A, on définit sa *racine* comme l'ensemble des éléments dont une puissance appartient à I :

$$\sqrt{I} = \{f \in A \colon \exists n \geq 0 (f^n \in I)\}$$

Il est aisé de vérifier que $\sqrt{I}$ est un idéal de A, que $\sqrt{I} \supseteq I$, et que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$. Evidemment, $\sqrt{A} = A$, et la réciproque est aussi vraie :

Remarque évidente 3.1. *Si A est un anneau commutatif, I un idéal de A, que $\sqrt{I} = A$ alors $I = A$.*

Démonstration : Si $\sqrt{I} = A$ alors $1 \in \sqrt{I}$, donc il existe $n \geq 0$ tel que $1^n \in I$. C'est-à-dire $1 \in I$. Mais alors $I = A$.

Quant à $\sqrt{\{0\}}$, c'est l'idéal des éléments nilpotents de A, appelé *nilradical* de A. Dans le cas de $k[X]$, naturellement, $\sqrt{\{0\}} = \{0\}$.

Lorsqu'un idéal J (d'un anneau commutatif) vérifie $\sqrt{J} = J$, on le dit *radical*. Puisque $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ pour tout idéal I, il est évident que $\sqrt{I}$ est un idéal radical. Plus précisément, $\sqrt{I}$ est le plus petit idéal radical contenant I (vérification immédiate).

Revenant à $k[X]$, on a un résultat facile :

Résultat facile 3.2. *Pour tout $C \subseteq k^n$, $Nul(C)$ est radical. Ainsi, pour $I \in \mathcal{I}$, $Nul(\mathrm{Var}(I))$ est un idéal radical contenant I, donc aussi $\sqrt{I}$.*

Démonstration : Pour $n \geq 1$, $f^n(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$. (Et $f^0 \in I$ seulement lorsque $I = k[X]$, auquel cas on a bien $f \in I$.)

Le grand théorème fondamental est la réciproque de 3.2. On ne va pas le démontrer dans toute sa généralité mais seulement (comme le font bien des auteurs) lorsque k est indénombrable.

Lemme 3.3. *Soit k un corps algébriquement clos indénombrable, K une extension de k de dimension au plus dénombrable. Alors $K = k$.*

Démonstration : Comme k est algébriquement clos, il suffit de montrer que K est algébrique sur k. Si ce n'est pas le cas, il contient un élément ξ transcendant sur k, et donc un sous-corps $k(\xi)$ isomorphe au corps des fractions rationnelles sur k. Mais ce dernier est de dimension indénombrable sur k car les $\frac{1}{\xi - a}$ y forment une famille libre (comme le montre la décomposition en éléments simples) et indénombrable. On est arrivé à une contradiction.

Théorème 3.4 (Nullstellensatz faible). *Si $I \in \mathcal{I}$ et $\mathrm{Var}(I) = \emptyset$ alors $I = k[X]$.*

Démonstration : Supposons par l'absurde $I \neq k[X]$. Quitte à plonger I dans un idéal maximal*, ce qui est possible d'après le lemme de Zorn, on peut supposer qu'il est maximal. Soit $K = k[X]/I$ le corps quotient. Comme la dimension de $k[X]$ sur k est dénombrable, il en va de même pour K. Le lemme 3.3 montre alors que $K = k$. En appelant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les images de $X_1, \ldots, X_n$ dans $K = k$, on a $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ pour tout $P \in I$. Par conséquent, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{Var}(I)$, donc $\mathrm{Var}(I) \neq \emptyset$.

Grand théorème hyper-archi-ultra-importantissime (Nullstellensatz, ou théorème des zéros de Hilbert) 3.5. *Si $I \in \mathcal{I}$ alors $Nul(\mathrm{Var}(I)) = \sqrt{I}$.*

Démonstration : L'inclusion $\sqrt{I} \subseteq Nul(\mathrm{Var}(I))$ a déjà été vue en 3.2. Supposons mantenant $f \in Nul(\mathrm{Var}(I))$. Dans l'anneau $k[X_1, \ldots, X_n, T]$, on considère l'idéal J engendré par I et par $1 - Tf$. On a $\mathrm{Var}(J) = \emptyset$: en effet, si $(x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathrm{Var}(J)$ alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ d'une part et $1 - tf(x_1, \ldots, x_n) = 0$ d'autre part, ce qui est une contradiction. Ainsi, 3.4 montre que $J = k[X_1, \ldots, X_n, T]$. On peut donc écrire

$$1 = gw + h(1 - Tf) \tag{1}$$

* On rappelle que par idéal maximal d'un anneau commutatif A on entend un idéal de A distinct de A maximal pour l'inclusion parmi les idéaux de A distincts de A ; l'anneau quotient A/I est alors un corps : voir 4.1.

où $w \in I$, $g, h \in k[X_1, \ldots, X_n, T]$. On ordonne alors g suivant les puissances de T : $g = g_0 + g_1 T + \cdots + g_s T^s$ avec $g_0, \ldots, g_s \in k[X]$. Mais alors (1) donne :

$$1 = g_0 w + g_1 w T + \cdots + g_s w T^s + h(1 - Tf)$$

et en multipliant par f^s, et en faisant apparaître des $1 - Tf$:

$$f^s = g_0 f^s w + g_1 f^{s-1} w + \cdots + g_s w + h_2(1 - Tf)$$

Dans cette expression, la variable T n'apparaît que dans le dernier terme du membre de droite : celui-ci est donc nul, et on a donc :

$$f^s = g_0 f^s w + g_1 f^{s-1} w + \cdots + g_s w$$

Comme $w \in I$, il s'ensuit que $f^s \in I$. Autrement dit, $f \in \sqrt{I}$. C'est le résultat désiré.

Voici quelques corollaires immédiats du Nullstellensatz :

Corollaire 3.6. *$\mathcal{I}_V$ est l'ensemble des idéaux radicaux de $k[X]$.*

Démonstration : On sait depuis 3.2 que si I est dans $\mathcal{I}_V$, alors I est radical. Réciproquement, si I est radical alors le Nullstellensatz 3.5 donne $I = \sqrt{I} = Nul(V)$ où $V = \mathrm{Var}(I)$, et donc $I \in \mathcal{I}_V$.

Corollaire 3.7. *Si $B \subseteq k[X]$ alors $Nul(\mathrm{Var}(B)) = \sqrt{\mathrm{Idé}(B)}$ (l'idéal radical engendré par B).*

Démonstration : C'est un corollaire immédiat de 1.2 et 3.5.

4. Quelques résultats d'algèbre commutative.

On rappelle qu'on dit qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *maximal* si et seulement si $I \neq A$, et les seuls idéaux J de A vérifiant $I \subseteq J$ sont I et A.

On rappelle qu'on dit qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *premier* si et seulement si $I \neq A$, et lorsque $uv \in I$ (avec $u, v \in A$) on a $u \in I$ ou bien $v \in I$.

On rappelle qu'on dit qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *radical* si et seulement si lorsque $u^n \in I$ (avec $u \in A, n \in \mathbb{N}$) on a $u \in I$.

Proposition 4.1. *Soit I un idéal d'un anneau commutatif A. Alors*

(i) I est maximal si et seulement si A/I est un corps.

(ii) I est premier si et seulement si A/I est un anneau intègre (sous-entendu : non nul).

(iii) I est radical si et seulement si A/I est réduit (i.e. ne contient pas d'élément nilpotent non nul).

Démonstration : Dans tout ce qui suit, on notera par une barre la surjection canonique $A \to A/I$ (ainsi, pour $u \in A$, $\bar{u}$ représente la classe de u, soit $u + I$; on a $\bar{u} = 0$ si et seulement si $u \in I$).

(i) : Supposons I maximal, et soit $\bar{u} \in A/I$. Si $\bar{u} \neq \bar{0}$ alors $u \notin I$, et donc $\mathrm{Idé}(I \cup \{u\}) \neq I$. Comme I est maximal, $\mathrm{Idé}(I \cup \{u\}) = A$. Par suite, il existe $h \in I$ et $v \in A$ tels que $h + uv = 1$. Mais alors $\bar{u}\bar{v} = \bar{1}$, ce qui montre que $\bar{u}$ est inversible donc que A/I est un corps. Réciproquement, supposons que A/I est un corps. Si J est un idéal de A tel que $I \subseteq J$, alors son image par la surjection canonique $A \to A/I$ est un idéal de A/I (l'image d'un idéal par un épimorphisme est un idéal), et comme les idéaux d'un corps sont triviaux, c'est soit $\{0\}$ soit A/I. Dans le premier cas, $J = I$, et dans le second, $J = A$.

(ii) : Cela vient tout simplement de ce que $\bar{u}\bar{v} = 0$ (resp. $\bar{u} = 0$, resp. $\bar{v} = 0$) si et seulement si $uv \in I$ (resp. $u \in I$, resp. $v \in I$).

(iii) : Cela vient tout simplement de ce que $\bar{u}^n = 0$ (resp. $\bar{u} = 0$) si et seulement si $u^n \in I$ (resp. $u \in I$).

Corollaire 4.2. *Un idéal maximal est premier, un idéal premier est radical.*

On notera que l'idéal $\{0\}$ est premier si et seulement si A est intègre.

Proposition 4.3. *Soit A un anneau factoriel (donc en particulier intègre), $I = (a)$ un idéal principal. Alors*
(i) I est premier si et seulement si a est nul ou irréductible.
(ii) I est radical si et seulement si a est nul ou sans facteur carré.

Démonstration : (i) : Supposons a non nul et non irréductible. Dans un premier temps, supposons de plus a non inversible. Alors on peut écrire $a = uv$ où ni u ni v ne sont inversibles. Dans ce cas, on a $u \notin I$ (en effet, si $u \in I$ alors on peut écrire $u = aw$, et alors $a = awv$ donc, comme $a \neq 0$ et que l'anneau est intègre, $wv = 1$, et donc v est inversible, contradiction) et de même $v \notin I$. Mais $uv \in I$. Donc I n'est pas premier. Dans un deuxième temps, si a est inversible, alors $I = A$ et donc I n'est pas non plus premier. Par contraposée, si I est premier, a est nul ou irréductible. Réciproquement, supposons a irréductible. Premièrement, a n'est pas inversible donc $I \neq A$. Deuxièmement, si $uv \in I$ avec $u, v \in A$, alors on peut écrire $uv = aw$. Mais ceci montre que a divise uv ; comme a est irréductible, il s'ensuit que a divise u ou v, et donc l'un des deux, u ou v appartient à I, ce qui montre que I est premier. Enfin, si a est nul, $I = \{0\}$, et il est bien premier.

(ii) : Si a est non nul et possède un facteur carré, on peut écrire $a = u^2 v$ avec u non inversible. Dans ce cas, $(uv)^2 = av \in I$. Mais uv ne peut pas être dans I (car sinon, on pourrait écrire $uv = aw$, donc $uv = u^2 vw$, donc, comme $uv \neq 0$ et que l'anneau est intègre, $uw = 1$, et donc u est inversible, contradiction). Ceci montre que I n'est pas radical. Par contraposée, si I est radical, a est nul ou sans facteur carré. Réciproquement, supposons a sans facteur carré ; soit $a = p_1 \cdots p_r$ une décomposition de a en facteurs irréductibles, deux-à-deux non conjugués (sans quoi a aurait un facteur carré). Supposons $u^n \in I$. Si $n = 0$, alors $I = A$ qui est bien radical, et on peut désormais prendre $n > 0$. Alors u^n est divisible par a, donc par $p_1, \ldots, p_r$; il s'ensuit que u est divisible par $p_1, \ldots, p_r$, donc aussi par a. Par suite, $u \in I$. Ainsi, I est radical. Enfin, si a est nul, $I = \{0\}$ et il est bien radical.

Corollaire 4.4. *Dans un anneau <u>principal</u>, tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux.*

Démonstration : Soit j un idéal premier non nul : l'anneau étant principal, on peut écrire $j = (a)$. Clairement, $a \neq 0$. D'après la proposition 4.3 (puisqu'un anneau principal est factoriel), a est irréductible. Supposons maintenant que I est un idéal de A et que $I \supseteq j$. Supposons $I = (u)$. Comme $a \in I$, on peut écrire $a = uv$. Mais alors, vu l'irréductibilité de a, u est soit inversible, auquel cas $I = A$, soit conjugué à a, auquel cas $I = j$. Ceci montre que j est maximal.

5. Anneaux des variétés algébriques affines.

Si V est une variété algébrique affine, on note $k[V]$ (ou parfois $\Gamma(V)$) l'anneau $k[X]/\,Nul(V)$. D'après 3.2 et 4.1(iii), cet anneau est réduit, i.e. ne contient pas d'élément nilpotent non nul. On l'appelle *anneau des fonctions régulières sur V* ou *anneau des fonctions polynômes sur V* ou encore *anneau structural de V*. (Et bien sûr, on peut aussi remplacer à volonté "anneau" par "algèbre".)

On sait (et même si on ne le sait pas, c'est clair) que les idéaux de $k[V]$ sont en bijection avec les idéaux de $k[X]$ contenant $Nul(V)$, la bijection étant celle qui envoie un idéal de $k[V]$ sur son image réciproque par la surjection canonique $\varpi\colon k[X] \to k[V]$.

Par ailleurs, V est muni d'une topologie, qui est la topologie induite sur V par la topologie de Zariski sur k^n. Autrement dit, les fermés de V sont les intersections de V avec les fermés de k^n, ou, de manière équivalente, les fermés de k^n contenus dans V.

On se doute bien qu'il y a une relation entre les idéaux de $k[V]$ et les fermés de V. Précisons donc cette relation. Si $\bar f \in k[V]$ (ce qui signifie que $\bar f$ est l'image d'un $f \in k[X]$ par la surjection canonique $\varpi\colon k[X] \to k[V]$) et $x \in V$, alors la valeur de $f(x)$ ne dépend pas du choix du représentant f de $\bar f$. En effet, si f_1 et f_2 sont deux tels représentants, on a $f_1 - f_2 \in Nul(V)$, et donc $f_1(x) = f_2(x)$. Cette valeur sera donc notée $\bar f(x)$. Remarquons d'ores et déjà que l'analogue de 1.1 est ici triviale : si $\bar f(x) = 0$ pour tout $x \in V$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in V$, soit $f \in Nul(V)$, soit $\bar f = 0$.

Si $B \subseteq k[V]$, on définit

$$\mathrm{Var}_V(B) := \{x \in V\colon \forall \bar f \in B(\bar f(x) = 0)\}$$

Et si $C \subseteq V$,

$$Nul_V(C) := \{\bar f \in k[V]\colon \forall x \in C(\bar f(x) = 0)\}$$

On a alors :

Nid de trivialités 5.1. *Soit $V \subseteq k^n$ une variété algébrique affine. Soit $\iota\colon V \to k^n$ l'injection canonique et $\varpi\colon k[X] \to k[V]$ la surjection canonique. Alors*

(i) Pour tout $B \subseteq k[X]$, on a $\mathrm{Var}_V(\varpi(B)) = \iota^{-1}(\mathrm{Var}(B)) = \mathrm{Var}(B) \cap V$.
(ibis) Si $B \subseteq k[V]$, $\mathrm{Var}_V(B) = \mathrm{Var}(\varpi^{-1}(B))$.
(ii) Pour tout $C \subseteq V$, on a $\varpi^{-1}(Nul_V(C)) = Nul(C)$, donc $Nul_V(C) = \varpi(Nul(C))$.
(iii) Tout fermé de V peut s'écrire $\mathrm{Var}_V(I)$ pour un certain idéal I de $k[V]$.

Démonstration : (i) : L'égalité $\iota^{-1}(\mathrm{Var}(B)) = \mathrm{Var}(B) \cap V$ est triviale. Si $x \in \mathrm{Var}_V(\varpi(B))$ alors $x \in V$, et pour tout $f \in B$, on a $\bar f(x) = \varpi(f)(x) = 0$ donc $f(x) = 0$; ceci montre $x \in \mathrm{Var}(B) \cap V$. Donc $\mathrm{Var}_V(\varpi(B)) \subseteq \mathrm{Var}(B) \cap V$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Var}(B) \cap V$, que $\bar f \in \varpi(B)$, on peut supposer $f \in B$, et alors $f(x) = 0$ donc $\bar f(x) = 0$; ceci montre $x \in \mathrm{Var}_V(\varpi(B))$. Donc $\mathrm{Var}_V(\varpi(B)) \supseteq \mathrm{Var}(B) \cap V$. Ainsi, $\mathrm{Var}_V(\varpi(B)) = \mathrm{Var}(B) \cap V$. (ibis) : D'après (i), on a $\mathrm{Var}_V(B) = \mathrm{Var}_V(\varpi(\varpi^{-1}(B))) = \mathrm{Var}(\varpi^{-1}(B)) \cap V$. Mais $\varpi^{-1}(B) \supseteq Nul(V)$, donc $\mathrm{Var}(\varpi^{-1}(B)) \subseteq \mathrm{Var}(Nul(V)) = V$, d'où $\mathrm{Var}(\varpi^{-1}(B)) \cap V = \mathrm{Var}(\varpi^{-1}(B))$. (ii) : Si $f \in Nul(C)$, pour tout $x \in C$, on a $\varpi(f)(x) = \bar f(x) = f(x) = 0$, et donc $\varpi(f) \in Nul_V(C)$, soit $f \in \varpi^{-1}(Nul_V(C))$; ceci montre $\varpi^{-1}(Nul_V(C)) \supseteq Nul(C)$. Réciproquement, si $f \in \varpi^{-1}(Nul_V(C))$, on a $\bar f = \varpi(f) \in Nul_V(C)$, et donc $f(x) = \bar f(x) = 0$ pour tout $x \in C$, soit $f \in Nul(C)$; ceci montre $\varpi^{-1}(Nul_V(C)) \subseteq Nul(C)$. Ainsi, $\varpi^{-1}(Nul_V(C)) = Nul(C)$. (iii) : Ceci découle de (i), de 1.2 (c'est-à-dire du fait que tout fermé de k^n peut s'écrire $\mathrm{Var}(J)$ pour un certain idéal J de $k[X]$) et du fait que si J est un idéal de $k[X]$, alors $\varpi(J)$ est un idéal de $k[V]$.

Comme pour l'espace affine, on a les résultats suivants :

Résultats 5.2. *Soit $V \subseteq k^n$ une variété algébrique affine. Alors*

(i) Si $B \subseteq k[V]$ alors $\mathrm{Var}_V(B) = \mathrm{Var}_V(\mathrm{Idé}(B))$.
(ii) Si I, J sont des idéaux de $k[V]$ alors $\mathrm{Var}_V(IJ) = \mathrm{Var}_V(I) \cup \mathrm{Var}_V(J)$.
(iii) Si I, J sont des idéaux de $k[V]$ alors $\mathrm{Var}_V(I \cap J) = \mathrm{Var}_V(I) \cup \mathrm{Var}_V(J)$.
(iv) Pour toute famille $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de parties de $k[V]$, on a $\mathrm{Var}_V(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Var}_V(B_\lambda)$.
(v) Pour toute famille $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'idéaux de $k[V]$, on a $\mathrm{Var}_V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Var}_V(I_\lambda)$.
(vi) Si I est un idéal de $k[V]$, on a $\mathrm{Var}_V(I) = V$ si et seulement si $I = \{\bar 0\}$.

(vii) *Si I est un idéal de $k[V]$, on a $\mathrm{Var}_V(I) = \emptyset$ si et seulement si $I = k[V]$.*

Démonstration : (i)–(v) se démontrent exactement comme dans le cas de k^n (voir 1.2–1.6). (vi) a été remarqué plus haut : c'est l'analogue de 1.1, ici trivial. Pour (vii), une implication est triviale ; pour démontrer l'autre, on fait appel à 5.1(ibis) : si $\mathrm{Var}_V(I) = \emptyset$ alors $\mathrm{Var}(\varpi^{-1}(I)) = \emptyset$, et d'après le Nullstellensatz faible 3.4, on a $\varpi^{-1}(I) = k[X]$, donc $I = k[V]$.

Ces préliminaires idiots étant passés, on peut se pencher sur quelque chose de plus intéressant :

Proposition 5.3. *Soit $V \subseteq k^n$ une variété algébrique affine. Alors V est irréductible si et seulement si $k[V]$ est intègre (la définition d'un espace topologique irréductible est donnée avant la proposition 1.8).*

Démonstration : Supposons tout d'abord que $k[V]$ n'est pas intègre. Alors il existe $f_1, f_2 \in k[V]$, non nuls et tels que $f_1 f_2 = 0$. On a alors $V_1 := \mathrm{Var}_V(f_1) \neq V$, $V_2 := \mathrm{Var}_V(f_2) \neq V$ (d'après 5.2(vi)) mais $\mathrm{Var}_V(f_1 f_2) = V$. Or $\mathrm{Var}_V(f_1 f_2) = V_1 \cup V_2$ (d'après 5.2(i) et 5.2(ii)), ce qui montre que V n'est pas irréductible. Réciproquement, supposons que $k[V]$ est intègre. Supposons $V = V_1 \cup V_2$ où V_1 et V_2 sont deux fermés de V. On peut écrire $V_1 = \mathrm{Var}_V(I_1)$ et $V_2 = \mathrm{Var}_V(I_2)$ où I_1, I_2 sont des idéaux de $k[V]$. Alors $V_1 \cup V_2 = \mathrm{Var}_V(I_1 I_2)$ (c'est 5.2(ii)), et donc $\mathrm{Var}_V(I_1 I_2) = V$, donc $I_1 I_2 = \{0\}$ (d'après 5.2(vi)). Par suite, comme $k[V]$ est intègre, soit $I_1 = \{0\}$ soit $I_2 = \{0\}$. Et donc, $V_1 = V$ ou $V_2 = V$. Ce qui montre que V est irréductible.

On dit qu'un anneau commutatif est *connexe* si ses seuls idempotents (éléments e tels que $e^2 = e$) sont 0 et 1. Cette terminologie est suggérée par la proposition suivante :

Proposition 5.4. *Soit $V \subseteq k^n$ une variété algébrique affine. Alors V est connexe si et seulement si $k[V]$ est connexe.*

Démonstration : Supposons tout d'abord que $k[V]$ n'est pas connexe. Alors il existe $e \notin \{0; 1\}$ tel que $e^2 = e$. Alors $e(1-e) = e - e^2 = 0$, et donc $V = \mathrm{Var}_V(e(1-e)) = \mathrm{Var}_V(e) \cup \mathrm{Var}_V(1-e)$. Comme de plus, $\mathrm{Var}_V(e) \cap \mathrm{Var}_V(1-e) = \emptyset$ (on ne peut pas avoir simultanément $e(x) = 0$ et $1 - e(x) = 0$!), que $\mathrm{Var}_V(e) \neq \emptyset$ car $e \neq 0$ et que $\mathrm{Var}_V(1-e) \neq \emptyset$ car $e \neq 1$, on en déduit que V n'est pas connexe. Réciproquement, supposons que $k[V]$ est connexe. Si $V = V_1 \cup V_2$ avec V_1, V_2 deux fermés de V disjoints, on peut écrire $V_1 = \mathrm{Var}_V(I_1)$ et $V_2 = \mathrm{Var}_V(I_2)$ avec I_1, I_2 deux idéaux de $k[V]$. De $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ on déduit $I_1 + I_2 = k[V]$ (avec 5.2(v)) et il existe donc $e \in I_1$ tel que $1 - e \in I_2$. Mais $V_1 \cup V_2 = V$ donne $I_1 I_2 = \{0\}$ (avec 5.2(ii)) et donc $e(1-e) = 0$, donc $e^2 = e$, et donc soit $e = 1$ soit $e = 0$, autrement dit, soit $e = 1$ soit $1 - e = 1$. Dans le premier cas, $1 \in I_1$ donc $I_1 = k[V]$ donc $V_1 = \emptyset$. Dans le second, $V_2 = \emptyset$. En somme, V est connexe.

En fait, en analysant la structure de la démonstration de cette proposition, on verra que si $V = V_1 \cup V_2$ avec V_1, V_2 fermés dans V et disjoints, on a $k[V] \cong k[V_1] \times k[V_2]$. Et on montrera qu'un anneau est connexe si et seulement si ce n'est pas le produit de deux anneaux non nuls.

Tant qu'on y est, autant rajouter le petit résultat suivant :

Proposition 5.5. *Soit $V \subseteq k^n$ une variété algébrique affine. Alors $V = \emptyset$ si et seulement si $k[V] = \{0\}$. Et V est un singleton si et seulement si $k[V]$ est un corps.*

Démonstration : La première assertion n'est rien d'autre qu'une reformulation du Nullstellensatz faible (3.4). Passons à la seconde. Supposons d'abord que $k[V]$ est un corps. Soit $x \in V$ (un tel x existe car $\{0\}$ n'est pas un corps, et en vue de la première assertion). Alors $\{x\}$ est fermé d'après 1.8. On peut donc écrire $\{x\} = \mathrm{Var}_V(I)$, où I est un idéal de $k[V]$ (c'est 5.1(iii)). Comme $\{x\} \neq \emptyset$, $I \neq k[V]$. Mais alors, $k[V]$ étant un corps, $I = \{0\}$ et donc $V = \{x\}$. Réciproquement, supposons que $V = \{x\}$. Soit I un idéal de $k[V]$. On a soit $\mathrm{Var}_V(I) = \emptyset$, auquel cas $I = k[V]$ d'après 5.2(vii), soit $\mathrm{Var}_V(I) = V$ auquel cas $I = \{0\}$ d'après 5.2(vi). Autrement dit, les seuls idéaux de $k[V]$ sont $\{0\}$ et $k[V]$. On sait bien que ceci montre que $k[V]$ est un corps (par exemple en appliquant 4.1(i) à $\{0\}$).

On peut maintenant jouer au jeu des correspondances entre l'algèbre et la géométrie : soit V une variété algébrique affine, $I = \mathit{Nul}(V)$. On a alors les propriétés correspondantes de V, de I et de $k[V] = k[X]/I$:

V **est**	I **est**	$k[V]$ **est**
$\emptyset$	$k[X]$	$\{0\}$
k^n	$\{0\}$	$k[X]$
un singleton	maximal	un corps
irréductible	premier	un anneau intègre
une variété (toujours)	radical	réduit
connexe		connexe
une hypersurface	principal et $\neq \{0\}$	

La dernière ligne définit une hypersurface : c'est une variété algébrique affine de la forme $\mathrm{Var}(f)$ où $f \neq 0$. Ceci ne se traduit pas au niveau de $k[V]$ puisque cela dépend du plongement (si on considère une hypersurface de k^n plongée canoniquement dans k^{n+1}, ce n'est plus une hypersurface alors que l'anneau est le même ; on verra toutefois plus loin une caractérisation de la dimension d'une variété en termes de son anneau structural.

Avant de conclure cette section, on va énoncer un résultat, qui en terme de catégories est l'essentielle surjectivité du foncteur $V \mapsto k[V]$ sur la catégorie des algèbres de type fini. En termes moins chinois, on appelle *k-algèbre de type fini* une k-algèbre engendrée (en tant qu'algèbre) par un nombre fini d'éléments. Ainsi, $k[X]$ est une k-algèbre de type fini, étant engendrée par $X_1, \ldots, X_n$.

Proposition 5.6. *Soit A une k-algèbre de type fini réduite. Alors il existe une variété algébrique V (dans un certain espace affine sur k) telle que $k[V] \cong A$.*

Démonstration : Soient $a_1, \ldots, a_n$ des générateurs de A. Alors il existe un épimorphisme (un morphisme surjectif de k-algèbres) $\lambda\colon k[X] := k[X_1, \ldots, X_n] \mapsto A$ tel que $\lambda(X_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit I le noyau de λ, de sorte que $A \cong k[X]/I$. A étant réduite, $k[X]/I$ l'est aussi, donc I est radical, et ceci montre que $\mathit{Nul}(\mathrm{Var}(I)) = I$ d'après le Nullstellensatz 3.5, et donc $A \cong k[X]/\mathit{Nul}(\mathrm{Var}(I)) = k[\mathrm{Var}(I)]$: on pose $V = \mathrm{Var}(I)$.

6. Premier aperçu des schémas. Spectre d'un anneau.

On a vu dans ce qui précède (ou on a presque vu, et il n'y a que quelques détails à compléter) que si V est une variété algébrique affine, les points de V sont en bijection avec les idéaux maximaux de V, la bijection consistant à envoyer le point $(x_1, \ldots, x_n)$ de V sur la projection de $(X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ sur $k[V]$. On va maintenant oublier que les points sont des points pour ne retenir que les idéaux maximaux. Si x est représenté par l'idéal maximal m_x, et que $B \subseteq k[V]$, à quelle condition a-t-on $x \in \mathrm{Var}_V(B)$? Il est facile de voir que cette condition est $B \subseteq m_x$. Autrement dit, donné $B \subseteq k[V]$, on va définir $\mathrm{Var}_V(B)$ non plus comme l'ensemble des points tels que (...) mais comme l'ensemble des idéaux maximaux de $k[V]$ qui contiennent B.

Mais c'est alors qu'on se rend compte qu'on n'a plus besoin de V du tout, mais seulement de $k[V]$. On reprend maintenant à zéro, et à reculons. On ne retiend plus qu'une k-algèbre de type fini réduite, et tant qu'on y est, on généralise à un anneau commutatif quelconque.

Proposition et définition 6.1. *Si A est un anneau commutatif quelconque, on notera* $\mathrm{Spm}\, A$ *l'ensemble des idéaux maximaux de A. On définit une topologie sur* $\mathrm{Spm}\, A$ *en appelant fermé un ensemble de la forme*

$$\mathrm{VSm}(B) := \{m \in \mathrm{Spm}\, A \colon B \subseteq m\}$$

où $B \subseteq A$ est quelconque ; mais on peut se limiter au cas où B est un idéal car $\mathrm{VSm}(B) = \mathrm{VSm}(\mathrm{Idé}(B))$. *L'espace topologique* $\mathrm{Spm}\, A$ *ainsi formé s'appelle le spectre maximal de A (et sa topologie s'appelle topologie de Zariski ou topologie spectrale). Lorsque, pour une raison quelconque, on voudra distinguer un point x de l'espace topologique* $\mathrm{Spm}\, A$ *de l'idéal maximal de A qui lui est égal, ce dernier sera noté m_x.*

(La vérification est laissée au lecteur, qui pourra s'inspirer de 6.2.)

Pour illustrer la convention faite à la fin, il est tout de même plus plaisant d'écrire $\mathrm{VSm}(m_x) = \{x\}$ que $\mathrm{VSm}(x) = \{x\}$.

En fait, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, il est avantageux de se limiter non pas aux idéaux maximaux, mais bien à tous les idéaux premiers. Ceci revient à ajouter des points pour toutes les sous-variétés irréductibles. Ceci donne la chose suivante :

Proposition et définition 6.2. *Si A est un anneau commutatif quelconque, on notera* $\operatorname{Spec} A$ *l'ensemble des idéaux premiers de A. On définit une topologie sur* $\operatorname{Spec} A$ *en appelant fermé un ensemble de la forme*

$$\mathrm{VSp}(B) := \{j \in \operatorname{Spec} A \colon B \subseteq j\}$$

où $B \subseteq A$ est quelconque ; mais on peut se limiter au cas où B est un idéal car $\mathrm{VSp}(B) = \mathrm{VSp}(\mathrm{Idé}(B))$. *L'espace topologique* $\operatorname{Spec} A$ *ainsi formé s'appelle le spectre de A (et sa topologie s'appelle topologie de Zariski ou topologie spectrale). Lorsque, pour une raison quelconque, on voudra distinguer un point x de l'espace topologique* $\operatorname{Spec} A$ *de l'idéal premier de A qui lui est égal, ce dernier sera noté j_x.*

Démonstration : Tout d'abord, débarrassons-nous de $\mathrm{VSp}(B) = \mathrm{VSp}(\mathrm{Idé}(B))$: cela vient de ce que $\mathrm{Idé}(B)$ est le plus petit idéal contenant B ; autrement dit, pour un idéal j quelconque, ou *a fortiori* premier, $B \subseteq j$ si et seulement si $\mathrm{Idé}(B) \subseteq j$. Ensuite, $\emptyset$ et $\operatorname{Spec} A$ sont fermés car $\mathrm{VSp}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{VSp}(\{0\}) = \operatorname{Spec} A$. L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé car $\mathrm{VSp}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{VSp}(B_\lambda)$ (c'est trivial). Reste à montrer que l'union de deux fermés est un fermé : pour cela, vu que tous les fermés peuvent s'obtenir comme $\mathrm{VSp}(I)$ où I est un idéal, il suffit de montrer la formule : $\mathrm{VSp}(IJ) = \mathrm{VSp}(I) \cup \mathrm{VSp}(J)$. Si $j \in \mathrm{VSp}(I)$ alors $j \supseteq I$ donc $j \supseteq IJ$ donc $j \in \mathrm{VSp}(IJ)$ et de même si $j \in \mathrm{VSp}(J)$; en somme, $\mathrm{VSp}(IJ) \supseteq \mathrm{VSp}(I) \cup \mathrm{VSp}(J)$. Réciproquement, si $j \in \mathrm{VSp}(IJ)$, on a $j \supseteq IJ$, et donc IJ a pour image $\{0\}$ par la surjection canonique $\varpi\colon A \to A/j$: $\{0\} = \varpi(IJ) = \varpi(I)\varpi(J)$; mais comme A/I est intègre, l'un des deux idéaux I ou J a pour image $\{0\}$, donc $j \supseteq I$ ou $j \supseteq J$, donc $j \in \mathrm{VSp}(I) \cup \mathrm{VSp}(J))$; en somme, $\mathrm{VSp}(IJ) \subseteq \mathrm{VSp}(I) \cup \mathrm{VSp}(J)$.

En rajoutant ainsi des points, en passant de $\operatorname{Spm} A$ à $\operatorname{Spec} A$, on a crée un espace topologique encore plus bizarre que ne l'était $\operatorname{Spm} A$: en général, $\operatorname{Spec} A$ n'est même pas T_1. Il est cependant T_0 comme nous allons le voir (un espace topologique T_0, ou espace *de Kolmogoroff* est un espace dans lequel de deux points distincts il en existe un qui a un voisinage ne contenant pas l'autre).

Proposition 6.3. $\operatorname{Spec} A$ *est T_0. Un point $x \in \operatorname{Spec} A$ est fermé (i.e. $\{x\}$ est fermé) si et seulement si j_x est maximal :* $\operatorname{Spm} A$ *est l'ensemble des points fermés de* $\operatorname{Spec} A$.

Démonstration : Soient x, y deux points distincts de $\operatorname{Spec} A$. Comme $j_x \neq j_y$, l'un des deux idéaux, j_x et j_y, n'est pas inclus dans l'autre. Supposons donc $j_x \not\subseteq j_y$. Alors $y \notin \mathrm{VSp}(j_x)$, tandis que $x \in \mathrm{VSp}(j_x)$ trivialement. Ainsi, $U := \operatorname{Spec} A \setminus \mathrm{VSp}(j_x)$ est un ouvert contenant y mais pas x, donc un voisinage de y ne contenant pas x. Ceci montre que $\operatorname{Spec} A$ est T_0. Dire que $\{x\}$ est fermé équivaut à dire qu'il existe un idéal I de A tel que le seul idéal premier de A contenant I soit j_x, et cela équivaut donc manifestement à dire que le seul idéal premier de A contenant j_x est j_x. C'est clairement le cas si j_x est maximal. Pour la réciproque, il suffit de constater que, d'après le lemme de Zorn, tout idéal est contenu dans un idéal maximal (ceci a déjà été utilisé en 3.4) ; j_x est donc contenu dans un idéal maximal, qui en particulier est premier, donc est j_x (car on suppose que j_x n'est contenu dans aucun idéal premier autre que lui-même), ce qui montre que j_x est maximal !

Comme exemple d'une particularité intéressante de $\operatorname{Spec} A$, signalons le fait que si A est intègre, l'idéal $\{0\}$ est premier : il lui correspond un point, noté ω, qui est assez inhabituel en ce qu'il est dense dans $\operatorname{Spec} A$: en effet, un fermé contenant ω ne peut être que de la forme $\mathrm{VSp}(B)$ avec $B \subseteq \{0\}$, et alors $\mathrm{VSp}(B) = \operatorname{Spec} A$. Un point dense est aussi appelé point *générique*. Un espace de Kolmogoroff ne peut pas posséder plus d'un point générique ; un tel point, s'il existe, est contenu dans tout ouvert non vide, et n'est contenu dans aucun fermé non plein. Dans le cas où A est principal, 4.4 montre que $\operatorname{Spec} A$ est égal à $\operatorname{Spm} A \cup \{\omega\}$: $\operatorname{Spec} A$ possède donc des points fermés et un point générique.