Produits tensoriels
et représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr

1. Produits tensoriels.

1.1. Rappels sur les modules.

Soit A un anneau, qu'on prendra commutatif pour simplifer. Un A-module est un groupe abélien M (noté additivement) muni d'une loi externe $\cdot : A \times M \to M$ telle que $1 \cdot x = x$, $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$, $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$ et $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ pour tous $a, b \in A$ et $x, y \in M$. Notons que A lui-même, muni de l'opération $a \cdot x = ax$, est un A-module. Lorsque A est un corps (commutatif), on parle d'espace vectoriel plutôt que de module.

Si M est un A-module, un sous-A-module N de M est un sous-groupe de M tel que $a \cdot x \in N$ pour tous $a \in A$ et $x \in N$. Dans ce cas, on définit une structure de A-module sur le groupe quotient M/N par $a \cdot (xN) = (a \cdot x)N$, et on appelle M/N muni de cette structure le module quotient de M par N.

Si M est un A-module, et U une partie quelconque de A, on appelle sous-A-module engendré par U l'intersection de tous les sous-A-modules de M contenant U.

Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille de A-modules, on munit le groupe produit $\prod_{i \in I} M_i$ d'une structure de A-module par $a \cdot (x_i)_{i \in I} = (a \cdot x_i)_{i \in I}$. Le module ainsi défini s'appelle le produit direct des A-modules M_i. Par ailleurs, le sous-ensemble de $\prod_{i \in I} M_i$ formé des familles (x_i) telles que $x_i = 0$ pour presque tout i, est un sous-A-module du produit direct, et s'appelle somme directe de la famille, noté $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

Si B est un ensemble quelconque, on définit le A-module libre de base B comme $F = \bigoplus_{b \in B} A$, c'est-à-dire le A-module des familles presque nulles d'éléments de A indexées par B. B s'identifie à une partie de F par $\iota : c \mapsto (\delta_{bc})_c$ (appelée injection canonique).

Si M, N sont deux A-modules, une application $f : M \to N$ est dite linéaire ssi elle vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ pour tous $a \in A$ et $x, y \in M$. Si M, M', N sont trois A-modules, une application $f : M \times M' \to N$ est dite bilinéaire ssi $f(x, \cdot)$ est linéaire pour tout $x \in M$, et $f(\cdot, x')$ est linéaire pour tout $x' \in M'$.

1.2. Produit tensoriel de deux modules.

Soit A un anneau commutatif, M, M' deux A-modules. On définit le produit tensoriel de M et M' de la façon suivante : soit F le A-module libre de base $M \times M'$, c'est-à-dire le A-module formé des combinaisons linéaires à coefficients dans A d'éléments de $M \times M'$, sans aucune relation entre eux. Soit Z le sous-module de F engendré par les éléments de la forme :

$$(x+y, x') - (x, x') - (y, x')$$
$$(x, x'+y') - (x, x') - (x, y')$$
$$(a \cdot x, x') - a \cdot (x, x')$$
$$(x, a \cdot x') - a \cdot (x, x')$$

Le produit tensoriel $M \otimes_A M'$ des modules M et M' est alors par définition le module quotient F/Z. Pour $x \in M$ et $x' \in M'$, on notera $x \otimes x'$ l'image de $(x, x') \in F$ dans F/Z.

D'après la définition même de Z, on voit que

$$\begin{cases} \beta : M \times M' \to M \otimes_A M' \\ \quad (x, x') \mapsto x \otimes x' \end{cases}$$

est bilinéaire. On l'appelle application bilinéaire canonique. Par ailleurs, d'après la définition de F, $\operatorname{im}\beta$ engendre $M \otimes_A M'$, c'est-à-dire que tout élément de $M \otimes_A M'$ est une combinaison lináire d'éléments de la forme $x \otimes x'$ avec $x \in M, x' \in M'$. **Attention** cependant, β n'est *pas* surjective en général (ni injective, évidemment).

1.3. Propriété universelle du produit tensoriel.

Proposition. *Soit A un anneau commutatif. Soient M, M', N trois A-modules. Soit $\varphi: M \times M' \to N$ une application bilinéaire ; alors il existe une* unique *application linéaire $\hat{\varphi}: M \otimes_A M' \to N$ telle que $\varphi = \hat{\varphi} \circ \beta$, où $\beta: M \otimes_A M' \to N$ est l'application bilinéaire canonique. De plus, cette "propriété universelle" caractérise le produit tensoriel (à isomorphisme près).*

Démonstration : Existence de $\hat{\varphi}$: Reprenons les notations employées dans la définition du produit tensoriel. Tout élément de F s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire à coefficients dans A d'éléments de $M \times M'$; on prolonge donc $\varphi: M \times M' \to N$ à $\tilde{\varphi}: F \to N$ par linéarité (i.e. si $f = \sum_i \alpha_i(x_i, x_i') \in F$, on pose $\tilde{\varphi}(f) = \sum_i \alpha_i \varphi(x_i, x_i')$). Puisque φ est bilinéaire, le noyau de $\tilde{\varphi}$ contient Z. Par conséquent, $\tilde{\varphi}$ induit, par passage au quotient, une application linéaire $\hat{\varphi}: F/Z \to N$ ($\hat{\varphi}(\bar{x}) = \tilde{\varphi}(x)$ pour tout $x \in \bar{x}$). C'est l'application recherchée : si $x \in M, x' \in M'$ alors $\hat{\varphi} \circ \beta(x, x') = \hat{\varphi}(x \otimes x') = \tilde{\varphi}(x, x') = \varphi(x, x')$. $\therefore$

Unicité de $\hat{\varphi}$: Si $\psi: M \otimes_A M' \to N$ linéaire vérifie elle-aussi $\varphi = \psi \circ \beta$, alors $\psi(x \otimes x') = \psi \circ \beta(x, x') = \varphi(x, x') = \hat{\varphi} \circ \beta(x, x') = \hat{\varphi}(x \otimes x')$ pour tous $x \in M, x' \in M'$. Par conséquent, ψ et $\hat{\varphi}$ coïncident sur les éléments de la cette forme (i.e. sur $\operatorname{im}\beta$). Comme ils engendrent $M \otimes_A M'$, on a $\psi = \hat{\varphi}$. $\therefore$

Caractérisation du produit tensoriel : Soit T un A-module vérifiant la même propriété universelle, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma: M \times M' \to T$ bilinéaire telle que pour tout $\varphi: M \times M' \to N$ bilinéaire il existe $\hat{\varphi}: T \to N$ linéaire unique vérifiant $\varphi = \hat{\varphi} \circ \gamma$. On applique alors la propriété universelle du produit tensoriel à l'application bilinéaire $\gamma: M \times M' \to T$: il existe donc $\hat{\gamma}: M \otimes_A M' \to T$ linéaire telle que $\gamma = \hat{\gamma} \circ \beta$. Par la propriété universelle de T cette fois, il existe $\hat{\beta}: T \to M \otimes_A M'$ linéaire telle que $\beta = \hat{\beta} \circ \gamma$. On a alors $\hat{\gamma} \circ \hat{\beta} \circ \gamma = \hat{\gamma} \circ \beta = \gamma$, et par la partie unicité de la propriété universelle de T, $\hat{\gamma} \circ \hat{\beta} = \mathrm{id}_{M \otimes_A M'}$. De même, par la partie unicité de la propriété universelle du produit tensoriel, on a $\hat{\beta} \circ \hat{\gamma} = \mathrm{id}_T$. Ainsi, $T \cong M \otimes_A M'$, et on a fini. $\therefore$

Remarque : La propriété universelle du produit tensorielle est très utile pour déduire d'autres propriétés de celui-ci. On aurait pu la prendre comme définition, mais alors il aurait fallu montrer l'existence du produit tensoriel, ce qui n'aurait pas été facile.

1.4. Propriétés élémentaires du produit tensoriel.

Proposition. *Soit A un anneau commutatif. Pour tous A-modules, on a alors :*
(i) $M \otimes_A (M' \otimes_A M'') \cong (M \otimes_A M') \otimes_A M''$.
(i) $M \otimes_A M' \cong M' \otimes_A M$.
(iii) $M \otimes_A \bigoplus_{i \in I} M_i' \cong \bigoplus_{i \in I} M \otimes_A M_i'$.

Démonstration : (i) : On applique la propriété universelle en remarquant qu'il revient au même de se donner une application bilinéaire $M \times (M' \otimes_A M'') \to A$, une application trilinéaire $M \times M' \times M'' \to A$, ou une application bilinéaire $(M \otimes_A M') \times M'' \to A$. $\therefore$

(ii) : On applique la propriété universelle en remarquant qu'il revient au même de se donner une application bilinéaire $M \times M' \to N$, ou une application bilinéaire $M' \times M \to N$. $\therefore$

(iii) : On applique la propriété universelle en remarquant qu'il revient au même de se donner une application bilinéaire $M \times \bigoplus_{i\in I} M'_i \to N$, ou une famille d'applications bilinéaires $M \times M'_i \to N$.

Si M est un A-module, on notera $M^{\otimes n}$ le produit tensoriel de n copies de M, appelé puissance tensorielle n-ième de M. On fait la convention $M^{\otimes 0} = A$.

1.5. Exemples de produits tensoriels.

Si K est un corps commutatif, E, E' deux K-espaces vectoriels, alors $E \otimes_K E'$ est un K-espace vectoriel. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, et $(e'_j)_{j\in J}$ une base de E', alors $(e_i \otimes e'_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $E \otimes_K E'$. ∵ Si $x \in E, x' \in E'$, on peut écrire $x = \sum_i \alpha_i e_i$ et $x' = \sum_j \beta_j e'_j$, et on a $x \otimes x' = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j e_i \otimes e'_j$, ce qui montre que la famille $(e_i \otimes e'_j)_{(i,j)}$ engendre les $x \otimes x'$, donc engendre $E \otimes_K E'$. Supposons à présent $\sum_i \sum_j \gamma_{i,j} e_i \otimes e'_j = 0$. Le produit $e^*_m (e')^*_n$ des formes linéaires e^*_m et $(e')^*_n$ (de la base duale), est une forme bilinéaire $\varphi: E \times E' \to K$. Il existe donc $\hat\varphi: E \otimes_K E' \to K$ linéaire telle que $\varphi = \hat\varphi \circ \beta$. On a alors $\hat\varphi(e_i \otimes e'_j) = \delta_{im}\delta_{jn}$, donc $0 = \hat\varphi(\sum_i \sum_j \gamma_{i,j} e_i \otimes e'_j) = \gamma_{mn}$, ce qui montre que la famille $(e_i \otimes e'_j)_{(i,j)}$ est libre. C'est donc une base. ∴

En particulier, dans le cas où E et E' sont de dimension finie, on a $\dim_K E \otimes_K E' = \dim_K E \times \dim_K E'$.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, un élément de $E^{\otimes m} \otimes_K (E^*)^{\otimes n}$ s'appelle un <u>tenseur</u> contravariant d'ordre m et covariant d'ordre n.

Si K est un corps commutatif, B, B' deux K-algèbres (non nécessairement associative), on peut munir $B \otimes_K B'$ d'une structure de K-algèbre par $(b \otimes b')(c \otimes c') = bc \otimes b'c'$. Le produit tensoriel de deux algèbres associatives est une algèbre associative. Le produit tensoriel d'une algèbre de Lie et d'une algèbre associative et commutative est une algèbre de Lie.

Si K est un sous-corps d'un corps commutatif L, B une algèbre (non nécessairement associative) sur K, la K-algèbre $B \otimes_K L$ peut être munie d'une structure de L-algèbre par $\lambda(b \otimes \mu) = b \otimes \lambda\mu$. La L-algèbre ainsi obtenue s'appelle algèbre obtenue à partir de B par <u>extension du corps de base</u> de K à L. Si B était une algèbre associative (resp. une algèbre de Lie), il en va de même de $B \otimes_K L$. Si $K = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$, on dit que $B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est la <u>complexifiée</u> de B. Par exemple, l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ est la complexifiée de l'algèbre $\mathbb{R}[X]$. ∵ On identifie $\mathbb{R}[X] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ à $\mathbb{C}[X]$ au moyen du morphisme $P \otimes_{\mathbb{R}} z \mapsto zP$. ∴ L'algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est la complexifiée de l'algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est la complexifiée de l'algèbre de Lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{R})$.

1.6. Fonctorialité et exactitude à droite du produit tensoriel.

Soit A un anneau commutatif, M, N, M', N' quatre A-modules, et $f: M \to N$ et $f': M' \to N'$ deux applications A-linéaire. Alors on définit une application A-linéaire $f \otimes f'$ de $M \otimes_A M'$ dans $N \otimes_A N'$ par $(f \otimes f')(x \otimes x') = f(x) \otimes f'(x')$. Pour vérifier que cette définition est bien valable, le plus simple est de faire usage de la propriété universelle : l'application $(x, x') \mapsto \beta(f(x), f'(x'))$ est bilinéaire de $M \times M'$ dans $N \otimes_A N'$, et par universalité du produit tensoriel, elle s'écrit $(f \otimes f') \circ \beta$ avec $f \otimes f'$ unique (il ne s'agit bien sûr pas du même β), qui vérifie ce qu'on veut.

Lorsque $M = N$ et $f = \mathrm{id}_M$ (resp. $M' = N'$ et $f' = \mathrm{id}_{M'}$), on note souvent $M \otimes f'$ (resp. $f \otimes M'$) plutôt que $\mathrm{id}_M \otimes f'$ (resp. $f \otimes \mathrm{id}_{M'}$).

On vérifie immédiatement les relations dites de "fonctorialité" : $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_{M'} = \mathrm{id}_{M\otimes_A M'}$ et

$$(g \otimes g') \circ (f \otimes f') = (g \circ f) \otimes (g' \circ f')$$

Proposition (exactitude à droite du produit tensoriel). *Soit A un anneau commutatif, et $M \to N \to P \to 0$ une suite exacte de A-modules (c'est-à-dire deux applications $f: M \to N$ et $g: N \to P$ linéaires avec g surjective et $\mathrm{im}\, f = \ker g$), Q un A-module ; alors la suite*

$$M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q \to P \otimes_A Q \to 0$$

obtenue en prenant le produit tensoriel avec Q, est aussi exacte (i.e. $g \otimes Q$ est surjective et $\mathrm{im}(f \otimes Q) = \ker(g \otimes Q)$).

Démonstration : La surjectivité de $g \otimes Q$ est claire (il suffit de vérifier que $p \otimes q \in \mathrm{im}(g \otimes Q)$ pour $p \in P, q \in Q$; or $p = g(y)$ pour un $y \in N$, donc $p \otimes q = (g \otimes Q)(y \otimes q)$). L'inclusion $\mathrm{im}(f \otimes Q) \subseteq \ker(g \otimes Q)$ l'est aussi (on a $(g \otimes Q)(f \otimes Q) = (g \circ f) \otimes Q = 0$). Reste l'inclusion réciproque. Supposons donc $(g \otimes Q)(y_0 \otimes q_0) = 0$, soit $g(y_0) \otimes q_0 = 0$. Soit $V = (N \otimes_A Q)/\mathrm{im}(f \otimes Q)$, et soit $\psi : N \times Q \to V$ l'application bilinéaire qui envoie (y, q) sur la classe de $y \otimes q$ dans V. Pour tous $p \in P, q \in Q$, on peut écrire $p = g(y)$ et on définit $\varphi(p, q) = \psi(y, q)$, qui ne dépend pas du choix de y car si $g(y) = 0$, on a $y = f(x)$ pour un $x \in M$, donc $\psi(y, q) = \psi(f(x), q) = 0$. Ceci définit $\varphi : P \times Q \to V$ bilinéaire ; comme $g(y_0) \otimes q_0 = 0$, on a $\varphi(g(y_0), q_0) = 0$, soit $\psi(y_0, q_0) = 0$, soit $y_0 \otimes q_0 \in \mathrm{im}(f \otimes Q)$, ce qu'il fallait démontrer. $\therefore$

On remarquera que la surjectivité de g a joué un rôle essentiel dans la dernière partie de la démonstration. En effet, le produit tensoriel n'est *pas* exact en général, c'est-à-dire que de l'exactitude de la suite $M \to N \to P$ on ne peut pas déduire celle de $M \otimes_A Q \to N \otimes_A Q \to P \otimes_A Q$. Ces considérations incitent à introduire un nouveau produit, nommé produit de torsion $P *_A Q$ de deux A-modules... mais ceci est une autre histoire.

1.7. Algèbre tensorielle, algèbre symétrique, algèbre extérieure et algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

Soit K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel. On rappelle que $E^{\otimes n}$ désigne le produit tensoriel de n copies de E, et que par convention ce produit vaut K si $n = 0$. On pose $T_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E^{\otimes n} = K \oplus E \oplus E \otimes_K E \oplus \cdots$. On munit $T_K(E)$ d'une structure de K-algèbre par

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$$

Cette algèbre s'appelle l'<u>algèbre tensorielle</u> de E.

On notera par $S_K^n(E)$ le quotient de $E^{\otimes n}$ par le sous-espace engendré par les $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ où $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On notera $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ la classe de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ dans $S_K^n(E)$. On pose $S_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_K^n(E)$, et on munit $S_K(E)$ d'une structure d'algèbre comme on l'a fait pour $T_K(E)$. Cette algèbre s'appelle l'<u>algèbre symétrique</u> de E. Elle est clairement commutative.

On notera par $\bigwedge_K^n(E)$ le quotient de $E^{\otimes n}$ par le sous-espace engendré par les $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ où $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et ε désigne la signature. On notera $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ la classe de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ dans $\bigwedge_K^n(E)$, et on munit $\bigwedge_K(E)$ d'une structure d'algèbre comme on l'a fait pour $T_K(E)$. Cette algèbre s'appelle l'<u>algèbre extérieure</u> de E. Elle est clairement anti-commutative.

Remarquons que si E est de dimension finie m, admettant $e_1, \ldots, e_m$ pour base, alors $\bigwedge_K^m(E)$ est de dimension 1, admettant $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$ pour base, et $\bigwedge_K^n(E) = \{0\}$ pour $n > m$. L'application m-linéaire alternée canonique $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ est un "déterminant universel" (tout déterminant s'écrit de façon unique comme la composée de cette application et d'une forme linéaire sur $\bigwedge_K^m(E)$).

Si le corps de base K est de caractéristique nulle, on peut également réaliser les puissances symétriques et extérieures comme des sous-espaces des puissances tensorielles plutôt que comme des quotients. Cela se fait au moyen des injections :

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$$

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$$

Cependant, les formules qui déterminent la structure d'algèbre sont alors moins commodes à écrire.

Soit à présent $\underline{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K. On appelle algèbre enveloppante universelle de $\underline{g}$ l'algèbre quotient de $T_K(\underline{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les $u\otimes v - v\otimes u - [u,v]$ où $u, v \in \underline{g}$. En particulier, dans cette algèbre, on a $uv - vu = [u,v]$ pour tous $u, v \in \underline{g}$.

2. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$.

Convention : Tous les espaces vectoriels, donc en particulier toutes les algèbres de Lie et toutes leurs représentations, considérées à présent seront supposés de dimension finie.

2.1. Rappels.

Une représentation d'une algèbre de Lie $\underline{g}$ (sur un corps K) sur un K-espace vectoriel E est un morphisme d'algèbres de Lie $\rho: \underline{g} \to \mathrm{End}(E)$, c'est-à-dire une application linéaire vérifiant $\rho([u,v]) = \rho(u)\circ\rho(v) - \rho(v)\circ\rho(u)$ pour tous $u, v \in \underline{g}$. Par abus de langage, on dira généralement que E est la représentation, et on notera $u \cdot x$ pour $\rho(u)(x)$.

Une représentation V d'une algèbre de Lie $\underline{g}$ est dite irréductible ssi les seuls sous-espaces de V stables par l'action de $\underline{g}$ sont $\{0\}$ et V.

Si V, V' sont deux représentations d'une même algèbre de Lie $\underline{g}$, on obtient une représentation de $\underline{g}$ sur la somme directe $V \oplus V'$ par $X\cdot(v,v') = (X\cdot v, X\cdot v')$, et sur le produit tensoriel $V \otimes_K V'$ par

$$X\cdot(v\otimes v') = (X\cdot v)\otimes v' + v\otimes(X\cdot v')$$

On en déduit clairement une représentation sur les puissances tensorielles d'une représentation V, et on vérifie immédiatement que cette représentation en induit une autre sur les puissances symétriques et extérieures.

Par ailleurs, une algèbre de Lie est dite semi-simple ssi elle n'a pas d'idéal résoluble non nul, c'est-à-dire ssi son radical est nul, simple ssi elle est non triviale et elle n'a pas d'idéal autre que $\{0\}$ et elle-même.

On admettra les théorèmes suivant :

Théorème (préservation de la dcómposition de Jordan). *Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{C}$. Pour tout $X \in \underline{g}$ il existe X_s, X_n (nécessairement uniques) tels que pour toute représentation $\rho: \underline{g} \to \underline{\mathtt{gl}}(V)$, $\rho(X_s), \rho(X_n)$ soient respectivement la partie diagonalisable et la partie nilpotente de $\rho(X)$.*

Théorème (réductibilité complète). *Soit V une représentation d'une algèbre de Lie* semi-simple *$\underline{g}$ sur $\mathbb{C}$. Alors V est somme directe de représentations irréductibles.*

(Traduction sophistiquée : l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{C}$ est semi-simple.)

2.2. $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$.

L'algèbre de Lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de trace nulle, muni du crochet de Lie $[X,Y] = XY - YX$.

On va donner u nom à trois éléments particuliers de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, à savoir

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui forment une base de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ et vérifient :

$$[H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y, \quad [X,Y] = H$$

L'algèbre de lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est *simple*. $\because$ En effet, si $\underline{\mathtt{j}}$ en est un idéal non nul, $\underline{\mathtt{j}}$ contient un élément non nul, disons $\alpha H + \beta X + \gamma Y$. Si $\beta = \gamma = 0$ alors $H \in \underline{\mathtt{j}}$, et donc $[H,X] = 2X \in \underline{\mathtt{j}}$, soit $X \in \underline{\mathtt{j}}$, et de même $Y \in \underline{\mathtt{j}}$, donc $\underline{\mathtt{j}} = \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Si $\gamma \neq 0$, on a $[[\alpha H + \beta X + \gamma Y, X], X] = -2\gamma X$, donc $X \in \underline{\mathtt{j}}$, donc $\underline{\mathtt{j}} = \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. De même si $\beta \neq 0$. Donc dans tous les cas $\underline{\mathtt{j}} = \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, et celle-ci est simple. $\therefore$

2.3. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$.

La <u>représentation standard</u> de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est tout simplement l'injection canonique $\rho\colon \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C}) \to \underline{\mathtt{gl}}_2(\mathbb{C})$. On la note U. Ainsi, U est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ opère sur U par multiplication à gauche.

Soit à présent V une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. D'après le théorème de préservation de la décomposition de Jordan, H agit diagonalement sur V (en effet, $H = H_s$ d'après la représentation standard, et donc $\rho(H) = \rho(H_s)$ est diagonalisable). Ceci signifie que V (en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel) est somme directe des sous-espaces propres de $\rho(H)$, $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$, avec $H \cdot v = \alpha v$ si $v \in V_\alpha$. Les complexes α pour lesquels $V_\alpha \neq \{0\}$ sont appelés les <u>poids</u> de la représentation, et la dimension de V_α est la <u>multiplicité</u> du poids α.

La question est maintenant de savoir comment X et Y opèrent sur les espaces propres V_α en question. Pour cela, on constate que, si $v \in V_\alpha$, alors

$$\begin{aligned} H \cdot (X \cdot v) &= [H, X] \cdot v + X \cdot (H \cdot v) \\ &= 2X \cdot v + X \cdot (\alpha v) \\ &= (\alpha + 2) X \cdot v \end{aligned}$$

Ce qui signifie $X \cdot v \in V_{\alpha+2}$. Par conséquent, X envoie V_α dans $V_{\alpha+2}$. De même, on a $Y(V_\alpha) \subseteq V_{\alpha-2}$.

Supposons à présent que la représentation V soit *irréductible*. Alors, pour tout poids α_0 de V, $\bigoplus_\alpha V_\alpha$ est une sous-représentation de V, où la somme est prise sur les poids α congrus à α_0 modulo 2, et elle est non nulle ; c'est donc V tout entière. Ainsi, les poids de V sont deux à deux congrus entre eux modulo 2. Par ailleurs, ils sont en nombre fini. Ils sont donc inclus dans l'ensemble $\{\alpha_0 - 2k, \dots, \alpha_0 - 2, \alpha_0\}$ pour un certain complexe α_0 et un certain naturel k. Supposons que α_0 et $\alpha_0 - 2k$ sont effectivement des poids. Alors nécessairement $\alpha_0 - 2\ell$ en est un pour tout $0 \leq \ell \leq k$. En effet, si $\alpha_0 - 2\ell$ n'était pas un poids, alors $\bigoplus_{i=0}^{\ell} V_{\alpha-2i}$ serait une sous-représentation non nulle de V et différente de V, une contradiction.

On sait donc maintenant que les poids de V sont $\alpha_0 - 2k, \dots, \alpha_0$ pour un certain complexe α_0 et un ceratain naturel k. Considérons un $v \in V_{\alpha_0}$ non nul, et soit W le sous-espace engendré par $v, Y \cdot V, Y^2 \cdot v, \dots$; W est manifestement stable par Y, et puisque $Y^\ell \cdot v \in V_{\alpha-2\ell}$, il l'est aussi par H. Vérifions par récurrence sur ℓ que

$$X \cdot (Y^\ell \cdot v) = \ell(\alpha_0 - \ell + 1) Y^{\ell-1} \cdot v$$

Pour $\ell = 0$, c'est $X \cdot v = 0$, ce qui est vrai car $V_{\alpha_0+2} = \{0\}$. Si la formule est vraie pour ℓ, on a

$$\begin{aligned} X \cdot (Y^{\ell+1} \cdot v) &= [X, Y] \cdot (Y^\ell \cdot v) + Y \cdot (X \cdot (Y^\ell \cdot v)) \\ &= H \cdot (Y^\ell \cdot v) + Y \cdot (\ell(\alpha_0 - \ell + 1) Y^{\ell-1} \cdot v) \\ &= ((\alpha_0 - 2\ell) + \ell(\alpha_0 - \ell + 1)) Y^\ell \cdot v \\ &= (\ell + 1)(\alpha_0 - \ell) Y^\ell \cdot v \end{aligned}$$

d'où le résultat. Par conséquent, W est une sous-représentation de V non nulle, donc égale à W. En particulier, on a montré que chaque V_α est de dimension 1. Mais on a fait mieux : si on applique la formule trouvée à $\ell = k + 1$, on trouve, comme $Y^{k+1} \cdot v = 0$,

$$0 = (k + 1)(\alpha_0 - k)$$

et donc $\alpha_0 = k$.

Récapitulons : les poids de V sont $-k, -k+2, \ldots, k-2, k$, tous de multiplicité 1. Si on choisit comme base de V les vecteurs $v, Y \cdot v, \ldots, Y^k \cdot v$ avec $v \in V_k$ non nul, alors V est complètement déterminé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} H \cdot (Y^\ell \cdot v) = (k-2\ell) Y^\ell \cdot v \\ X \cdot (Y^\ell \cdot v) = \ell(k-\ell+1) Y^{\ell-1} \cdot v \\ Y \cdot (Y^\ell \cdot v) = Y^{\ell+1} \cdot v \end{cases}$$

En particulier, V est uniquement déterminé par la donnée du seul naturel k. Et pour tout naturel k, on vérifie qu'il existe une unique représentation $V^{(k)}$ de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ vérifiant les équations ci-dessus. Sa dimension est $k+1$.

La représentation standard U de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est irréductible de dimension 2 ; c'est donc $V^{(1)}$. De fait, ses poids sont $-1, +1$ avec U_{-1} le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et U_1 celui engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La représentation adjointe de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est irréductible de dimension 3 ; c'est donc $V^{(2)}$. De fait, ses poids sont $-2, 0, 2$ avec V_{-2} le sous-espace engendré par Y, V_0 par H et V_2 par X.

On peut alors revenir aux représentations V qui ne sont pas irréductibles : elles s'écrivent comme une somme directe de représentations irréductibles, et alors les poids de V sont l'union des poids de ses composantes irréductibles, et les multiplicités s'ajoutent. Il est alors clair qu'une représentation est uniquement déterminée par ses poids et les multiplicités de ceux-ci.

2.4. Pléthysme.

Si $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$ et $W = \bigoplus_\beta W_\beta$ sont deux représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ (non nécessairement irréductibles). Alors $V \otimes W$ est une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, et s'écrit

$$V \otimes W = \bigoplus_\gamma \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V_\alpha \otimes W_\beta$$

Or si $x \otimes y \in V_\alpha \otimes W_\beta$, on a $H \cdot (x \otimes y) = (H \cdot x) \otimes y + x \otimes (H \cdot y) = (\alpha x) \otimes y + x \otimes (\beta y) = (\alpha+\beta)(x \otimes y)$. Par conséquent, les poids de $V \otimes W$ sont les sommes des poids de V et de ceux de W, et la multiplicité d'un poids γ de $V \otimes W$ s'obtient en sommant, sur toutes les écritures $\gamma = \alpha + \beta$ avec α un poids de V et β un poids de W le produit des multiplicités de ceux-ci.

Considérons par exemple le produit tensoriel $V \otimes V$ de deux copies de la représentation adjointe $V = V^{(2)}$ de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Les poids de V sont $-2, 0, 2$. Ceux de $V \otimes V$ sont donc $-4, -2, 0, 2, 4$, avec multiplicités respectives $1, 2, 3, 2, 1$. On a donc $V \otimes V = V^{(4)} + V^{(2)} + V^{(0)}$.

On peut se livrer à une analyse semblable de $S^n(V)$ et $\bigwedge^n(V)$ pour une représentation V de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ quelconque : les poids de $S^n(V)$ sont obtenus en prenant la somme de n poids de V, sans faire de distinction entre deux sommes qui s'obtiennent l'une à partir de l'autre par une simple permutation des termes, et les poids de $\bigwedge^n(V)$ sont obtenus en prenant la somme de n poids de V distincts, en ignorant encore une fois l'ordre.

En particulier, on remarque sans mal que $S^n(U) = V^{(n)}$. Ainsi, toutes les représentations irréductibles de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ sont des puissances symétriques de la représentation standard, U.

Bibliographie.

[1] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory : A First Course*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics (129), Readings in Mathematics. Chapitres 8–11 et appendice B.

[2] D. Eisenbud, *Commutative Algebra...*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics (150). Appendice A2.

[3] J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin. Chapitres I–IV.