Produits tensoriels
et représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr

1. Produits tensoriels.

1.1. Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.

Proposition et définition 1.1.1. *Soient E, F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K. Alors il existe un espace vectoriel, noté $E \otimes_K F$, $E \otimes F$ lorsque aucune ambiguïté ne peut en résulter, et appelé* <u>*produit tensoriel*</u> *de E et F (sur le corps K) et une application bilinéaire dite canonique $\beta: E \times F \to E \otimes F$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute application bilinéaire $\varphi: E \times F \to G$ (G un K-espace vectoriel quelconque), il existe $\hat\varphi: E \otimes F \to G$ linéaire* unique *telle que $\varphi = \hat\varphi \circ \beta$. Le produit tensoriel est unique à isomorphisme près. On notera $x \otimes y = \beta(x, y)$ pour $x \in E, y \in F$. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_j)_{j \in J}$ une base de F alors $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $E \otimes F$.*

Démonstration : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_j)_{j \in J}$ une base de F. On appelle $E \otimes F$ le K-espace vectoriel de base $(g_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, où $g_{i,j}$ sont des objets distincts quelconques (par exemple, $g_{i,j} = (e_i, f_j)$). On définit $\beta: E \times F \to E \otimes F$ par

$$\beta\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j f_j\right) = \sum_i \sum_j x_i y_j g_{i,j}$$

Il est évident que β ainsi définie est bilinéaire. On notera $x \otimes y := \beta(x, y)$ pour $x \in E, y \in F$, et on a alors $e_i \otimes f_j = g_{i,j}$, ce qui démontre au passage la dernière assertion. Si $\varphi: E \times F \to G$ est bilinéaire, on voit que $\hat\varphi$ doit vérifier $\hat\varphi(e_i \otimes f_j) = \varphi(e_i, f_j)$, et ceci définit bien une application $\hat\varphi: E \otimes F \to G$ linéaire telle que $\varphi = \hat\varphi \circ \beta$. Reste enfin l'unicité du produit tensoriel : supposons que T soit un K-espace vectoriel vérifiant la même propriété universelle, pour une application $\gamma: E \times F \to T$ bilinéaire. D'après la propriété universelle du produit tensoriel, il existe $\hat\gamma: E \otimes F \to T$ linéaire telle que $\gamma = \hat\gamma \circ \beta$, et d'après la propriété universelle de T, il existe $\hat\beta: T \to E \otimes F$ linéaire telle que $\beta = \hat\beta \circ \gamma$. On a alors $\hat\beta \circ \hat\gamma \circ \beta = \hat\beta \circ \gamma = \beta$, et d'après la partie unicité de la propriété universelle du produit tensoriel, $\hat\beta \circ \hat\gamma = \mathrm{id}_{E \otimes F}$. De même, $\hat\gamma \circ \hat\beta = \mathrm{id}_T$, et $\hat\beta$ et $\hat\gamma$ sont donc des isomorphismes réciproques de $E \otimes F$ avec T, d'où l'unicité. $\therefore$

De plus, l'isomorphisme ι entre T et $E \otimes F$ est défini de manière unique sous la condition que $\beta = \iota \circ \gamma$, ce qui permet d'identifier T et $E \otimes F$.

En particulier, dans le cas où E et F sont de dimension finie, on a

$$\dim_K(E \otimes_K F) = (\dim_K E)(\dim_K F)$$

Il est important de remarquer que l'application β n'est *pas* surjective en général ; autrement dit, tout élément de $E \otimes F$ ne s'écrit pas forcément sous la forme $x \otimes y$ avec $x \in E$ et $y \in F$. Cependant, $\operatorname{im} \beta$ engendre $E \otimes F$, i.e. tout élément de $E \otimes F$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $x \otimes y$. Par conséquent, pour définir une application linéaire sur $E \otimes F$, il suffit de définir sa valeur sur les $x \otimes y$.

1.2. Propriétés élémentaires du produit tensoriel.

Proposition 1.2.1. *Soit K un corps commutatif. Pour tous K-espaces vectoriels, on a alors :*
(i) $E \otimes (F \otimes G) \cong (E \otimes F) \otimes G$.
(i) $E \otimes F \cong F \otimes E$.
(iii) $E \otimes \bigoplus_{i \in I} F_i \cong \bigoplus_{i \in I} (E \otimes F_i)$.

Démonstration : C'est évident en considérant des bases d'après les propriétés du produit cartésien. De plus, tous les isomorphismes ainsi obtenus sont canoniques. $\therefore$

Si E est un K-espace vectoriel, on notera $E^{\otimes n}$ le produit tensoriel de n copies de E, appelé puissance tensorielle n-ième de E. On fait la convention $E^{\otimes 0} = K$.

Remarque : Profitons de l'occation pour signaler qu'un élément $x \otimes y \in E \otimes F$ est nul ssi $x = 0$ ou $y = 0$. $\because$ Si $x \neq 0$, on peut le compléter en une base de E, et de même si $y \neq 0$. Le produit de ces deux bases donne alors une base de $E \otimes F$ dont $x \otimes y$ est un élément, et il n'est donc pas nul. $\therefore$

1.3. Exemples de produits tensoriels.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, un élément de $E^{\otimes m} \otimes (E^*)^{\otimes n}$ s'appelle un <u>tenseur</u> contravariant d'ordre m et covariant d'ordre n. Si $(e_i)_{i=1\dots n}$ est une base de E, $((e^*)^j)_{j=1\dots n}$ la base duale, un tenseur contravariant d'ordre m et covariant d'ordre n peut s'écrire

$$W = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_m} \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_n} W^{i_1,\dots,i_m}_{j_1,\dots,j_n}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \otimes (e^*)^{j_1} \otimes \cdots \otimes (e^*)^{j_n}$$

C'est la notation indicielle, souvent utilisée par les physiciens, en particulier en relativité (et on omet alors les signes somme).

Profitons-en pour écrire la formule de changement de base. Si (e_i) et (f_μ) sont deux bases du même espace vectoriel E, on peut écrire

$$f_\mu = J^i_\mu e_i$$

(avec une sommation sur i implicite), où J est la matrice de changement de base. Si $v = v^\mu f_\mu$ (sommation sur μ) est un vecteur de E, on obtient ses composantes sur la base (e_i) par $v = v^i e_i$ où

$$v^i = J^i_\mu v^\mu$$

Pour faire un changement de coordonnées semblable sur un covecteur (un élément de E^*), il faut utiliser la matrice inverse de J, qu'on notera J^μ_i, qui vérifie

$$J^i_\mu J^\mu_j = \delta^i_j$$

Si $a = a_\mu (f^*)_\mu$ est un élément de E^*, on obtient ses composantes sur la base $(e^*)^i$ par $a = a_i (e^*)^i$ où

$$a_i = J^\mu_i a_\mu$$

De manière générale, si

$$W = W^{\mu_1,\dots,\mu_m}_{\nu_1,\dots,\nu_n}\, f_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes f_{\mu_m} \otimes (f^*)^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes (f^*)^{\nu_n}$$

est un tenseur contravariant d'ordre n et covariant d'ordre m, le changement de coordonnées se fait par :

$$W^{i_1,\dots,i_m}_{j_1,\dots,j_n} = J^{i_1}_{\mu_1} \cdots J^{i_m}_{\mu_m} J^{\nu_1}_{j_1} \cdots J^{\nu_n}_{j_n}\, W^{\mu_1,\dots,\mu_m}_{\nu_1,\dots,\nu_n}$$

Si K est un corps commutatif, B, B' deux K-algèbres (non nécessairement associatives), on peut munir $B \otimes_K B'$ d'une structure de K-algèbre par $(b \otimes b')(c \otimes c') = bc \otimes b'c'$. Le produit tensoriel de deux algèbres associatives est une algèbre associative. Le produit tensoriel d'une algèbre de Lie et d'une algèbre associative et commutative est une algèbre de Lie.

Si K est un sous-corps d'un corps commutatif L, B une algèbre (non nécessairement associative) sur K, la K-algèbre $B \otimes_K L$ peut être munie d'une structure de L-algèbre par $\lambda(b \otimes \mu) = b \otimes \lambda\mu$. La L-algèbre ainsi obtenue s'appelle algèbre obtenue à partir de B par <u>extension du corps de base</u> de K à L. Si B était une algèbre associative (resp. une algèbre de Lie), il en va de même de $B \otimes_K L$. Si $K = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$, on dit que $B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est la <u>complexifiée</u> de B. Par exemple, l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ est la complexifiée de l'algèbre $\mathbb{R}[X]$. $\because$ On identifie $\mathbb{R}[X] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ à $\mathbb{C}[X]$ au moyen du morphisme $P \otimes_{\mathbb{R}} z \mapsto zP$. $\therefore$ L'algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est la complexifiée de l'algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est la complexifiée de l'algèbre de Lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{R})$.

Si E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K, alors on a une injection ι (canonique) du produit tensoriel $E^* \otimes F$ du dual de E avec F, dans l'espace vectoriel $L(E, F)$ des morphismes de E dans F. Cette injection est donnée par

$$\iota(l \otimes y) \colon x \mapsto l(x)\, y$$

Si E et F sont de dimension finie, alors on a $\dim(E^* \otimes F) = (\dim E)(\dim F) = \dim L(E, F)$, et par conséquent ι est un isomorphisme (en général, l'image de ι est l'ensemble des endomorphismes de rang fini).

1.4. Fonctorialité du produit tensoriel.

Soit K un corps commutatif, E, F, E', F' quatre K-espaces vectoriels, et $f \colon E \to E'$ et $g \colon F \to F'$ deux applications linéaires. Alors on définit une application linéaire $f \otimes g$ de $E \otimes F$ dans $E' \otimes F'$ par $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$. Pour vérifier que cette définition est bien valable, le plus simple est de faire usage de la propriété universelle : l'application $(x, y) \mapsto \beta'(f(x), g(y))$ est bilinéaire de $E \times F$ dans $E' \otimes F'$, et par universalité du produit tensoriel, elle s'écrit $(f \otimes f') \circ \beta$ avec $f \otimes f'$ unique, qui vérifie ce qu'on veut.

Lorsque $E = E'$ et $f = \mathrm{id}_E$ (resp. $F = F'$ et $g = \mathrm{id}_F$), on note souvent $E \otimes g$ (resp. $f \otimes F$) plutt que $\mathrm{id}_E \otimes g$ (resp. $f \otimes \mathrm{id}_F$).

On vérifie immédiatement les relations dites de "fonctorialité" : $\mathrm{id}_E \otimes \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{E \otimes F}$ et

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

1.5. Puissances tensorielles, symétriques et extérieures d'un espace vectoriel.

Soit K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel. On rappelle que $E^{\otimes n}$ désigne le produit tensoriel de n copies de E, et que par convention ce produit vaut K si $n = 0$. Ces puissances tensorielles vérifient (et sont caractérisées par) la propriété universelle suivante : si $\varphi \colon E \times \cdots \times E \to F$ est n-linéaire, il existe $\hat{\varphi} \colon E^{\otimes n} \to F$ linéaire unique telle que $\varphi = \hat{\varphi} \circ \beta$, où $\beta \colon E \times \cdots \times E \to E^{\otimes n}$, définie par $\beta(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, est l'application n-linéaire canonique $\because$ Démonstration par récurrence sur n. $\therefore$

Si E est de dimension ℓ finie, alors la dimension de $E^{\otimes n}$ est évidemment ℓ^n.

On notera par $S^n(E)$ le quotient de $E^{\otimes n}$ par le sous-espace engendré par les $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ où $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On notera $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ la classe de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ dans $S^n(E)$. $S^n(E)$ s'appelle la puissance symétrique n-ième de E. Elle vérifie (et est caractérisée par) la propriété universelle suivante : si $\varphi \colon E \times \cdots \times E \to F$ est n-linéaire *symétrique*, il existe $\hat{\varphi} \colon S^n(E) \to F$ linéaire unique telle que $\varphi = \hat{\varphi} \circ \beta$, où $\beta \colon E \times \cdots \times E \to S^n(E)$, définie par $\beta(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, est l'application n-linéaire symétrique canonique $\because$ Une application n-linéaire sur E^n est symétrique ssi lorsqu'on la relève à $E^{\otimes n}$ elle s'annule sur les $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ $\therefore$

Si $X_1, \ldots, X_\ell$ est une base de E, alors l'application $X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_n} \mapsto X_{i_1} \cdots X_{i_n}$ définit un isomorphisme de $S^n(E)$ sur l'ensemble des polynmes homogènes à ℓ variables à coefficients dans K. La dimension de $S^n(E)$ est donc $\binom{n+\ell-1}{n}$.

On notera par $\bigwedge^n(E)$ le quotient de $E^{\otimes n}$ par le sous-espace engendré par les $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ où $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et ε désigne la signature. On notera $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ la classe de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ dans $\bigwedge^n(E)$. $\bigwedge^n(E)$ s'appelle la puissance extérieure n-ième de E. Elle vérifie (et est caractérisée par) la propriété universelle suivante : si $\varphi: E \times \cdots \times E \to F$ est n-linéaire *antisymétrique*, il existe $\hat{\varphi}: \bigwedge^n(E) \to F$ linéaire unique telle que $\varphi = \hat{\varphi} \circ \beta$, où $\beta: E \times \cdots \times E \to \bigwedge^n(E)$, définie par $\beta(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$, est l'application n-linéaire antisymétrique canonique.

Si E est de dimension ℓ finie, alors la dimension de $\bigwedge^n(E)$ est $\binom{\ell}{n}$. En particulier, $\bigwedge^\ell(E)$ est de dimension 1. L'application $\beta: (x_1, \ldots, x_\ell) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_\ell$ se comporte comme un "déterminant universel", c'est-à-dire que tout déterminant s'écrit comme composé de β par une forme linéaire sur $\bigwedge^\ell(E)$.

1.6. Algèbre tensorielle, algèbre symétrique, et algèbre extérieure.

Soit K un corps commutatif et E un espace vectoriel sur K.

On pose $T^\bullet(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E^{\otimes n} = K \oplus E \oplus E \otimes E \oplus \cdots$. On munit $T^\bullet(E)$ d'une structure de K-algèbre par

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$$

Cette algèbre s'appelle l'<u>algèbre tensorielle</u> de E.

On pose $S^\bullet(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n(E)$, et on munit $S^\bullet(E)$ d'une structure d'algèbre comme on l'a fait pour $T^\bullet(E)$, c'est-à-dire par

$$(x_1 \cdot \ldots \cdot x_m)(y_1 \cdot \ldots \cdot y_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_m \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$$

Cette algèbre s'appelle l'<u>algèbre symétrique</u> de E. Elle est clairement commutative. Par ailleurs, si E est de dimension finie ℓ, admettant $X_1, \ldots, X_\ell$ comme base, alors

$$S^\bullet(E) \cong K[X_1, \ldots, X_\ell]$$

(isomorphisme de K-algèbres).

On pose $\bigwedge^\bullet(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge^n(E)$, et on munit $\bigwedge^\bullet(E)$ d'une structure d'algèbre comme on l'a fait pour $T^\bullet(E)$, c'est-à-dire par

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m)(y_1 \wedge \cdots \wedge y_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_n$$

(on aura toutefois plutt tendance à noter $x \wedge y$ le produit de x et y avec $x, y \in \bigwedge^\bullet(E)$). Cette algèbre s'appelle l'<u>algèbre extérieure</u> de E. Si E est de dimension finie ℓ, la dimension de $\bigwedge^\bullet(E)$ est 2^ℓ.

Les algèbres $T^\bullet(E)$, $S^\bullet(E)$ et $\bigwedge^\bullet(E)$ sont des <u>algèbres graduées</u> : une K-algèbre graduée est une K-algèbre A qui s'écrit $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ avec $A_k A_{k'} \subseteq A_{k+k'}$. Les éléments de A_k s'appellent les éléments <u>homogènes</u> de degré k, et tout élément x s'écrit de façon unique comme somme d'éléments homogènes non nuls de degrés distincts ; le plus haut degré intervenant dans cette décomposition s'appelle le degré de x et se note $\deg x$. Dans le cas de $S^\bullet(E)$ (en dimension finie), on retrouve le degré ordinaire des polynmes.

On dit qu'une algèbre graduée A est <u>anti-commutative</u> ssi pour tous x, y homogènes de degrés respectifs m, n, on a $yx = (-1)^{mn} xy$. C'est le cas de $\bigwedge^\bullet(E)$.

Si le corps de base K est de caractéristique nulle, on peut également réaliser les puissances symétriques et extérieures comme des sous-espaces des puissances tensorielles plutt que comme des quotients. Cela se fait au moyen des injections :

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$$

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$$

Cependant, les formules qui déterminent la structure d'algèbre sont alors moins commodes à écrire.

1.7. Produits tensoriels de représentations.

(Voir la section 2.1 pour les définitions des termes utilisés ici.)

Si G est un groupe, U, V deux représentations linéaires de G (sur un même corps commutatif K), on définit une représentation de G sur $U \otimes_K V$ par $\rho(g)(x \otimes y) = (\rho(g)(x)) \otimes (\rho(g)(y))$. De manière peut-être plus élégante, on se donne $\rho_U : G \to L(U)$ et $\rho_V : G \to L(V)$ deux morphismes de groupes, et on définit $\rho_{U \otimes V} : G \to L(U \otimes V)$ par

$$\rho_{U \otimes V}(g) = \rho_U(g) \otimes \rho_V(g)$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une représentation, on fait usage de la relation de fonctorialité du produit tensoriel.

Profitons de l'occasion pour signaler que si U est une représentation de G, son dual U^* en est aussi une, par $\rho(g)(l) : x \mapsto l(\rho(g^{-1})(x))$, c'est-à-dire en fait $\rho_{U^*}(g) = {}^t\rho_U(g)$. En dimension finie, comme $L(U, V) \cong U^* \otimes V$, si U et V sont des représentations de G, alors $L(U, V)$ aussi, et cette représentation est donnée (même en dimension infinie, du reste) par

$$\rho_{L(U,V)}(g)(f) : x \mapsto \rho_V(g)(f(\rho_U(g^{-1})(x)))$$

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_G(U, V)$ des homomorphismes de G-représentations est précisément le sous-espace laissé invariant par G.

Si G est un groupe linéaire, $\rho : G \to L(U)$ une représentation de G, on peut en déduire une représentation de l'algèbre de Lie “tangente” $\underline{\mathrm{g}}$ en dérivant. Si par exemple $\underline{\mathrm{g}}$ a été définie comme l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G, on définit, pour $\gamma \in \underline{\mathrm{g}}$,

$$\rho(\gamma)(x) = \left.\frac{d}{dt}(\rho(\gamma(t))(x))\right|_{t=0}$$

(Plus généralement, si on considère G comme une variété C^∞ et $\underline{\mathrm{g}}$ comme son espace tangent en l'identité, alors la représentation de $\underline{\mathrm{g}}$ est la différentielle en l'identité de la représentation de G.)

Dans ces conditions, si G est un groupe linéaire d'algèbre de lie $\underline{\mathrm{g}}$, U, V deux représentations de G, cherchons quelle est la représentation de $\underline{\mathrm{g}}$ sur $U \otimes V$. Pour cela, soit $\gamma \in \underline{\mathrm{g}}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\rho(\gamma)(x \otimes y) &= \left.\frac{d}{dt}(\rho(\gamma(t))(x \otimes y))\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d}{dt}(\rho(\gamma(t))(x) \otimes \rho(\gamma(t))(y))\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d}{dt}(\rho(\gamma(t))(x))\right|_{t=0} \otimes y \;+\; x \otimes \left.\frac{d}{dt}(\rho(\gamma(t))(x))\right|_{t=0} \\
&= \rho(\gamma)(x) \otimes y + x \otimes \rho(\gamma)(y)
\end{aligned}$$

C'est la formule essentielle à retenir : si $\underline{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie quelconque, U, V deux représentations de $\underline{\mathfrak{g}}$, alors on définit :

$$X \cdot (u \otimes v) = (X \cdot u) \otimes v + u \otimes (X \cdot v)$$

pour tous $X \in \underline{\mathfrak{g}}, u \in U, v \in V$. De manière semblable, on a la représentation duale : si U est une représentation d'une algèbre de Lie $\underline{\mathfrak{g}}$, alors on définit une représentation de $\underline{\mathfrak{g}}$ sur U^* par

$$X \cdot l \colon u \mapsto -l(X \cdot u)$$

Et enfin, on a la représentation de $\underline{\mathfrak{g}}$ sur $L(U, V)$ donnée par

$$X \cdot f \colon u \mapsto X \cdot f(u) - f(X \cdot u)$$

Comme pour les groupes, le sous-espace des morphismes de représentations est le sous-espace invariant par l'action de $\underline{\mathfrak{g}}$; seulement ici, on dit qu'un vecteur u est invariant par l'action de $\underline{\mathfrak{g}}$ ssi $X \cdot u = 0$ pour tout $X \in \underline{\mathfrak{g}}$ (on dit aussi que $\underline{\mathfrak{g}}$ "tue" u).

On déduit des considérations précédentes la manière dont on construit les puissances tensorielles, symétriques et extérieures d'une représentation (d'un groupe ou d'une algèbre de Lie). En ce qui concerne les puissances tensorielles, il n'y a rien de plus à dire : on a

$$g \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = (g \cdot u_1) \otimes \cdots \otimes (g \cdot u_n)$$

pour les groupes et

$$X \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = (X \cdot u_1) \otimes \cdots \otimes u_n + \cdots + u_1 \otimes \cdots \otimes (X \cdot u_n)$$

Pour les puissances symétriques et extérieures, on remarque que les représentations ci-dessus définies "passent au quotient", ce qui signifie que les formules semblables, en remplaçant $\otimes$ par $\cdot$ ou $\wedge$ selon le cas, définissent bien une représentation.

Nous concluons par un exemple. Le groupe $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ a la représentation standard $\mathbb{C}^4$. Considérons le carré extérieur $\bigwedge^2(\mathbb{C}^4)$ de celle-ci : il s'agit d'un espace vectoriel de dimension $\binom{4}{2} = 6$ sur lequel $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ agit par

$$g \cdot (u \wedge v) = (gu) \wedge (gv)$$

Or sur $\bigwedge^2(\mathbb{C}^4)$, on dispose de la forme bilinéaire symétrique canonique :

$$\begin{aligned} \varphi \colon \textstyle\bigwedge^2(\mathbb{C}^4) \times \bigwedge^2(\mathbb{C}^4) &\to \textstyle\bigwedge^4(\mathbb{C}^4) \\ (x \wedge y, x' \wedge y') &\mapsto x \wedge y \wedge x' \wedge y' \end{aligned}$$

En identifiant $\bigwedge^4(\mathbb{C}^4)$ à $\mathbb{C}$, on obtient une forme quadratique non dégénérée sur $\bigwedge^2(\mathbb{C}^4)$, et cette forme est préservée par l'action de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, car $x \wedge y \wedge z \wedge t$ est un déterminant, et donc préservé par les éléments de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ puisque ceux-ci sont de déterminant 1 (de manière équivalente, $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ n'a pas de représentation non triviale de dimension 1). On a donc défini un morphisme $\psi \colon \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$. Si $g \in \ker \psi$, alors $gu \wedge gv = u \wedge v$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}^4$. Mais $u' \wedge v' = u \wedge v$ implique que soit u est colinéaire à v et u' à v', soit le plan engendré par u, v est égal au plan engendré par u', v' (en effet, $u' \wedge v' = u \wedge v$ implique que pour tous x, y on a $\det(u, v, x, y) = \det(u', v', x, y)$, donc que u, v, x, y sont liés ssi u', v', x, y le sont). On en déduit donc que (pour tout u) tous les plans passant par u passent aussi par gu, c'est-à-dire que gu est colinéaire à u. Par conséquent, $g = \pm\,\mathrm{id}$ et la réciproque est évidente. Le noyau de ψ est donc discret. Par conséquent, le morphisme associé des algèbres de Lie, $\psi_* \colon \underline{\mathtt{sl}}_4(\mathbb{C}) \to \underline{\mathtt{so}}_6(\mathbb{C})$, est injectif, et par égalité des dimensions, surjectif. Ainsi, $\mathrm{im}\,\psi$ contient un voisinage de l'élément neutre dans $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$, et par connexité, ψ est surjectif. Pour conclure, on a la suite exacte

$$0 \to \{\pm\,\mathrm{id}\} \to \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \mathrm{SO}_6(\mathbb{C}) \to 0$$

2. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$.

Convention : Tous les espaces vectoriels, donc en particulier toutes les algèbres de Lie et toutes leurs représentations, considérés à présent seront supposés de dimension finie. Par ailleurs, il ne sera question que d'algèbres de Lie *complexes* : "linéaire" signifiera toujours "$\mathbb{C}$-linéaire", et en particulier toutes les représentations sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur lesquels l'algèbre de Lie agit $\mathbb{C}$-linéairement.

2.1. Rappels.

Une <u>algèbre de Lie</u> $\underline{\mathtt{g}}$ est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire antisymétrique, le crochet,

$$[\cdot,\cdot]\colon \underline{\mathtt{g}}\times\underline{\mathtt{g}}\mapsto\underline{\mathtt{g}}$$

(il revient au même de se donner une application linéaire $\bigwedge^2\underline{\mathtt{g}}\to\underline{\mathtt{g}}$) qui vérifie l'identité de Jacobi :

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

pour tous $x,y,z\in\underline{\mathtt{g}}$. Un morphisme d'algèbres de Lie est une application linéaire qui préserve le crochet.

Une algèbre de Lie est dite <u>abélienne</u> ssi son crochet est identiquement nul.

Un <u>idéal</u> $\underline{\mathtt{j}}$ d'une algèbre de Lie $\underline{\mathtt{g}}$ est un sous-espace vectoriel de $\underline{\mathtt{g}}$ tel que $[a,x]\in\underline{\mathtt{j}}$ pour tout $a\in\underline{\mathtt{g}}$ et $x\in\underline{\mathtt{j}}$. Ainsi $\{0\}$ et $\underline{\mathtt{g}}$ sont des idéaux de $\underline{\mathtt{g}}$. Une algèbre de Lie qui n'a pas d'autres idéaux est dite <u>simple</u>.

Une <u>représentation</u> d'une algèbre de Lie $\underline{\mathtt{g}}$ sur un espace vectoriel V est un morphisme d'algèbres de Lie $\rho\colon\underline{\mathtt{g}}\to\underline{\mathtt{gl}}(V)$, où $\underline{\mathtt{gl}}(V)$ est l'algèbre de Lie des endomorphismes de V muni du crochet $[X,Y]=XY-YX$. On dit parfois par abus de langage que V lui-même est une représentation de $\underline{\mathtt{g}}$; on dit aussi qu'il s'agit d'un $\underline{\mathtt{g}}$-module. On notera fréquemment $X\cdot u=\rho(X)(u)$ pour $X\in\underline{\mathtt{g}}$ et $u\in V$. La relation fondamentale est alors

$$[X,Y]\cdot u=X\cdot(Y\cdot u)-Y\cdot(X\cdot u)$$

Si V est une représentation d'une algèbre de Lie $\underline{\mathtt{g}}$, on se permet parfois certains abus d'écriture comme $XY\cdot u$ où $X,Y\in\underline{\mathtt{g}}$ et $u\in V$ pour désigner $X\cdot(Y\cdot u)$. Ceci est particulièrement utile dans un cas comme $X^n\cdot u$. Il faut toutefois bien prendre garde à ce que XY *n'est pas* un élément de $\underline{\mathtt{g}}$ (c'est en fait un élément de l'"algèbre enveloppante universelle" de $\underline{\mathtt{g}}$).

Si V est une représentation d'une algèbre de Lie $\underline{\mathtt{g}}$, on appelle <u>sous-représentation</u> de V un sous-espace vectoriel de V stable par l'action de $\underline{\mathtt{g}}$. On sait déjà prendre le produit tensoriel de deux représentations de $\underline{\mathtt{g}}$. On peut par ailleurs prendre des sommes directes de représentations, par $X\cdot(u+v)=X\cdot u+X\cdot v$.

Pour toute algèbre de Lie $\underline{\mathtt{g}}$, on dispose de la <u>représentation adjointe</u>, ad, donnée par $\mathrm{ad}(X)(Y)=[X,Y]$.

2.2. $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$.

L'algèbre de Lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de trace nulle, muni du crochet de Lie $[X,Y]=XY-YX$.

On va donner un nom à trois éléments particuliers de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, à savoir

$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

qui forment une base de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ et vérifient :

$$[H,X]=2X,\quad [H,Y]=-2Y,\quad [X,Y]=H$$

L'algèbre de lie $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est *simple*. $\because$ En effet, si $\underline{\mathtt{j}}$ en est un idéal non nul, $\underline{\mathtt{j}}$ contient un élément non nul, disons $\alpha H + \beta X + \gamma Y$. Si $\beta = \gamma = 0$ alors $H \in \underline{\mathtt{j}}$, et donc $[H, X] = 2X \in \underline{\mathtt{j}}$, soit $X \in \underline{\mathtt{j}}$, et de même $Y \in \underline{\mathtt{j}}$, donc $\underline{\mathtt{j}} = \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Si $\gamma \neq 0$, on a $[[\alpha H + \beta X + \gamma Y, X], X] = -2\gamma X$, donc $X \in \underline{\mathtt{j}}$, donc $\underline{\mathtt{j}} = \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. De même si $\beta \neq 0$. Donc dans tous les cas $\underline{\mathtt{j}} = \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, et celle-ci est simple. $\therefore$

La <u>représentation standard</u> de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est tout simplement l'injection canonique $\rho: \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C}) \to \underline{\mathtt{gl}}_2(\mathbb{C})$.

2.3. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$: poids.

Soit à présent V une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Pour tout complexe α, notons V_α le noyau de $\rho(H) - \alpha\,\mathrm{id}$. Les V_α sont en somme directe ; soit $V_\infty = \bigoplus_\alpha V_\alpha$. (On verra plus loin qu'en fait $V_\infty = V$, mais nous n'en avons pas besoin pour l'instant.) On a ainsi $H \cdot v = \alpha v$ si $v \in V_\alpha$. Les complexes α pour lesquels $V_\alpha \neq \{0\}$, c'est-à-dire les valeurs propres de $\rho(H)$, sont appelés les <u>poids</u> de la représentation, et la dimension de V_α est la <u>multiplicité</u> du poids α. Notons également que, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (et qu'on est en dimension finie), l'endomorphisme $\rho(H)$ admet une valeur propre, i.e. la représentation a au moins un poids.

La question est maintenant de savoir comment X et Y opèrent sur les espaces propres V_α en question. Pour cela, on constate que, si $v \in V_\alpha$, alors

$$\begin{aligned} H \cdot (X \cdot v) &= [H, X] \cdot v + X \cdot (H \cdot v) \\ &= 2X \cdot v + X \cdot (\alpha v) \\ &= (\alpha + 2) X \cdot v \end{aligned}$$

Ce qui signifie $X \cdot v \in V_{\alpha+2}$. Par conséquent, X envoie V_α dans $V_{\alpha+2}$. De même, on a $\rho(Y)(V_\alpha) \subseteq V_{\alpha-2}$. Tout ceci est représenté sur le dessin suivant :

On commence par obtenir le résultat suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit V une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, et α_0 un poids de V tel que $\alpha_0 + 2$ ne soit pas un poids de V. Alors α_0 est un naturel.*

Démonstration : Considérons un $v \in V_{\alpha_0}$ non nul. Vérifions par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}$ que*

$$XY^\ell \cdot v = \ell(\alpha_0 - \ell + 1) Y^{\ell-1} \cdot v$$

Pour $\ell = 0$, c'est $X \cdot v = 0$, ce qui est vrai car $V_{\alpha_0+2} = \{0\}$. Si la formule est vraie pour ℓ, on a

$$\begin{aligned} XY^{\ell+1} \cdot v &= [X, Y] \cdot (Y^\ell \cdot v) + Y \cdot (XY^\ell \cdot v) \\ &= H \cdot (Y^\ell \cdot v) + Y \cdot (\ell(\alpha_0 - \ell + 1) Y^{\ell-1} \cdot v) \\ &= ((\alpha_0 - 2\ell) + \ell(\alpha_0 - \ell + 1)) Y^\ell \cdot v \\ &= (\ell + 1)(\alpha_0 - \ell) Y^\ell \cdot v \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

* Encore une fois (voir section 2.1), XY^ℓ n'est *pas* un élément de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Lorsqu'on écrit $XY^\ell \cdot v$, cela signifie tout simplement $X \cdot (Y \cdot (Y \cdot \ldots \cdot v) \ldots)$.

ce qui termine la récurrence. Si on applique la formule trouvée au plus petit ℓ tel que $Y^\ell \cdot v = 0$ (un tel ℓ existe car les vecteurs $v, Y \cdot v, Y^2 \cdot v, \ldots$ appartiennent à des espaces en somme directe et qu'on est en dimension finie), on trouve $\ell(\alpha_0 - \ell + 1) = 0$, et donc $\alpha_0 = \ell - 1 \in \mathbb{N}$. $\therefore$

Remarquons qu'il existe effectivement un poids α_0 tel que $\alpha_0 + 2$ ne soit pas un poids, car l'ensemble des poids doit être fini (puisqu'on est en dimension finie).

2.4. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$: représentations irréductibles.
Supposons à présent que la représentation V soit *irréductible*. On a vu que $\rho(H)(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$, $\rho(X)(V_\alpha) \subseteq V_{\alpha+2}$ et $\rho(Y)(V_\alpha) \subseteq V_{\alpha-2}$. Par conséquent, V_∞ est une sous-représentation de V, et elle est non nulle ; comme V est irréductible, $V_\infty = V$.

A présent, pour tout poids α_0 de V, $\bigoplus_\alpha V_\alpha$ est une sous-représentation de V, où la somme est prise sur les poids α congrus à α_0 modulo 2, et elle est non nulle ; c'est donc V tout entière. Ainsi, les poids de V sont deux à deux congrus entre eux modulo 2. Par ailleurs, ils sont en nombre fini. Ils sont donc inclus dans l'ensemble $\{\alpha_0 - 2k, \ldots, \alpha_0 - 2, \alpha_0\}$ pour un certain complexe α_0 et un certain naturel k. Supposons que α_0 et $\alpha_0 - 2k$ soient effectivement des poids. Le lemme 2.3.1 assure alors que α_0 est un naturel, appelons-le n. De plus, $n - 2\ell$ est un poids pour tout $0 \leq \ell \leq k$. En effet, si $n - 2\ell$ n'était pas un poids, alors $\bigoplus_{i=0}^{\ell} V_{n-2i}$ serait une sous-représentation non nulle de V et différente de V, une contradiction.

On sait donc maintenant que les poids de V sont $n - 2k, \ldots, n$ pour un certain naturel n et un certain naturel k. Considérons un $v \in V_n$ non nul, et soit W le sous-espace engendré par $v, Y \cdot v, Y^2 \cdot v, \ldots$; le calcul (2.3.2) montre que W est stable par X ; et il est manifestement stable par Y et H. Par conséquent, W est une sous-représentation de V non nulle, donc égale à W. En particulier, on a montré que chaque V_α est de dimension 1. Mais on a fait mieux : si on applique la formule (2.3.1) à $\ell = k + 1$, on trouve, comme $Y^{k+1} \cdot v = 0$,

$$0 = (k+1)(\alpha_0 - k)$$

et donc $n = \alpha_0 = k$.

Récapitulons : les poids de V sont $-k, -k+2, \ldots, k-2, k$, tous de multiplicité 1. Si on choisit comme base de V les vecteurs $v, Y \cdot v, \ldots, Y^k \cdot v$ avec $v \in V_k$ non nul, alors V est complètement déterminé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} H \cdot (Y^\ell \cdot v) = (k - 2\ell) Y^\ell \cdot v \\ X \cdot (Y^\ell \cdot v) = \ell(k - \ell + 1) Y^{\ell-1} \cdot v \\ Y \cdot (Y^\ell \cdot v) = Y^{\ell+1} \cdot v \end{cases}$$

En particulier, V est uniquement déterminé par la donnée du seul naturel k. Et pour tout naturel k, on vérifie qu'il existe une unique représentation $V^{(k)}$ de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ vérifiant les équations ci-dessus. Sa dimension est $k + 1$.

La représentation standard $\mathbb{C}^2$ de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est irréductible de dimension 2 ; c'est donc $V^{(1)}$. De fait, ses poids sont $-1, +1$ avec V_{-1} le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et V_1 celui engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La représentation adjointe de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est irréductible de dimension 3 ; c'est donc $V^{(2)}$. De fait, ses poids sont $-2, 0, 2$ avec V_{-2} le sous-espace engendré par Y, V_0 par H et V_2 par X.

2.5. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$: réductibilité.
Notre but à présent est de montrer que toute représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ (de dimension finie, toujours) est somme directe de représentations irréductibles.

On commence pour cela par le lemme suivant :

Lemme 2.5.1. *Soit V une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ sur laquelle $\rho(H)$ est nilpotent. Alors V est triviale, i.e. $Z \cdot u = 0$ pour tous $Z \in \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C}), u \in V$.*

Démonstration : Supposons $\rho(H)^n = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Posons $N = [H, [H, \ldots, [H, X] \ldots]]$ avec $2n_0$ facteurs H. On développe $\rho(N)$, ce qui donne

$$\rho(N) = \sum_n (-1)^n \binom{2n_0}{n} \rho(H)^n \rho(X) \rho(H)^{2n_0 - n}$$

On a donc, pour tout n, soit $n \geq n_0$ soit $2n_0 - n \geq n_0$. Par suite, $\rho(N) = 0$. Mais d'autre part, $N = 2^{2n_0} X$. On a donc $X \cdot u = 0$ pour tout $u \in V$. Et de même, $Y \cdot u = 0$ pour tout $u \in V$. Comme $H = [X, Y]$, on a aussi $H \cdot u = 0$ pour tout $u \in V$, d'où le résultat. $\therefore$

Si V est une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, on dira que $b := \rho(H)^2 + 2(\rho(X)\,\rho(Y) + \rho(Y)\,\rho(X))$ est son <u>Casimir</u>.

Lemme 2.5.2. *Soit V une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ et b son Casimir. Alors b commute à $\rho(H)$, $\rho(X)$ et $\rho(Y)$.*

Démonstration : Pour rendre les calculs plus lisibles, nous retirons les ρ. On a alors

$$\begin{aligned} bH - Hb &= 2(XYH - HXY + YXH - HYX) \\ &= 2(XYH - XHY + XHY - HXY + YXH - YHX + YHX - HYX) \\ &= 2(X[Y,H] + [X,H]Y + Y[X,H] + [Y,H]X) \\ &= 2(2XY - 2XY - 2YX + 2YX) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc b commute à $\rho(H)$. Et

$$\begin{aligned} bX - Xb &= H^2X - XH^2 + 2(XYX - X^2Y + YX^2 - XYX) \\ &= H^2X - HXH + HXH - XH^2 + 2(XYX - X^2Y + YX^2 - XYX) \\ &= H[H,X] + [H,X]H + 2(X[Y,X] + [Y,X]X) \\ &= 2HX + 2XH + 2(-XH - HX) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc b commute à $\rho(X)$, et de même, b commute à $\rho(Y)$. $\therefore$

Lemme 2.5.3. *Soit V une représentation non triviale de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ et b son Casimir. Alors b a une valeur propre non nulle.*

Démonstration : D'après le lemme 2.5.1, $\rho(H)$ n'est pas nilpotente, donc admet une valeur propre non nulle, disons α. On peut évidemment supposer que $\alpha + 2$ ou bien $\alpha - 2$ n'est pas une valeur propre de $\rho(H)$ (tout en gardant $\alpha \neq 0$). Quitte à changer H en $-H$ et à échanger X et Y, ce qui change α en $-\alpha$, on peut supposer que c'est $\alpha + 2$ qui n'est pas une valeur propre. Alors le lemme 2.3.1 assure que α est un naturel. On a donc $\alpha > 0$. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre α. On a $b(v) = H^2 \cdot v + 2(XY \cdot v + YX \cdot v) = H^2 \cdot v + 2[X, Y] \cdot v + 4YX \cdot v$. Or $X \cdot v \in V_{\alpha+2} = \{0\}$, et $[X, Y] = H$, donc $b(v) = (\alpha^2 + 2\alpha)v$ et v est donc vecteur propre de b pour la valeur propre $\alpha^2 + 2\alpha > 0$. $\therefore$

Lemme 2.5.4. *Soit $\varphi: E \twoheadrightarrow F$ une application linéaire surjective, $u \in L(E), v \in L(F)$ vérifiant $v(\varphi(x)) = \varphi(u(x))$ pour tout $x \in E$. Alors pour tout λ on a $\varphi(\mathrm{car}(u, \lambda)) = \mathrm{car}(v, \lambda)$ (espace caractéristique associé à la valeur propre λ).*

Démonstration : Si $(u - \lambda)^n(x) = 0$ alors $(v - \lambda)^n(\varphi(x)) = \varphi((u - \lambda)^n(x)) = 0$, donc $\varphi(\mathrm{car}(u, \lambda)) \subseteq \mathrm{car}(v, \lambda)$. Or $\sum_\lambda \varphi(\mathrm{car}(u, \lambda)) = \varphi(\sum_\lambda \mathrm{car}(u, \lambda)) = \varphi(E) = F = \sum_\lambda \mathrm{car}(v, \lambda)$. Par conséquent, $\varphi(\mathrm{car}(u, \lambda)) = \mathrm{car}(v, \lambda)$. $\therefore$

Lemme 2.5.5. *Soit V une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, et U une sous-représentation de V. Alors il existe une sous-représentation W de V telle que $V = U \oplus W$.*

Démonstration : Considérons l'application linéaire surjective

$$\varphi: L(V, U) \twoheadrightarrow L(U, U), \alpha \mapsto \alpha|_U$$

de restriction à U. On a vu comment comment considérer $L(V, U)$ et $L(U, U)$ comme des représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Dans ces conditions, φ est clairement un morphisme de représentations. Désignons par b le Casimir de $L(V, U)$ et b' celui de $L(U, U)$. Puisque φ est un morphisme de représentations, on a $b'(\varphi(\alpha)) = \varphi(b(\alpha))$ pour tout $\alpha \in L(V, U)$. On applique alors le lemme 2.5.4, qui donne $\varphi(\mathrm{car}(b, 0)) = \mathrm{car}(b', 0)$. On a par ailleurs $\mathrm{id}_U \in \mathrm{car}(b', 0)$, car id_U est un homomorphisme de représentations, donc il est tué par tous les éléments de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$; soit α un antécédent par φ dans $\mathrm{car}(b, 0)$ de $\mathrm{id}_U \in \mathrm{car}(b', 0)$. Puisque b commute aux $\rho(Z), Z \in \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ (lemme 2.5.2), $\mathrm{car}(b, 0)$ est une sous-représentation de $L(V, U)$, et comme b y est nilpotent, d'après le lemme 2.5.3, elle est triviale. En particulier, on a $Z \cdot \alpha = 0$ pour tout $Z \in \underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Comme on l'a remarqué précédemment (section 1.7), ceci signifie que $\alpha: V \to U$ est un morphisme de représentations. Or $\alpha|_U = \mathrm{id}_U$ puisque $\varphi(\alpha) = \mathrm{id}_U$. On en déduit que $W := \ker \alpha$ est un supplémentaire de U, stable par l'action de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. $\therefore$

Théorème 2.5.6. *Toute représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration : C'est une récurrence immédiate sur la dimension de la représentation, V. Si $\dim V = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $\dim V > 0$, soit V est irréductible et il n'y a rien à démontrer, soit V admet une sous-représentation U différente de $\{0\}$ et V, auquel cas d'après le lemme 2.5.5, on peut écrire $V = U \oplus W$; il reste alors à appliquer l'hypothèse de récurrence à U et W. $\therefore$

2.6. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$: classification complète.

On sait à présent que toute représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est somme directe de représentations irréductibles ; et par ailleurs, les résultats de la section 2.4 classifient complètement celles-ci, et en particulier déterminent leurs poids, à savoir : pour tout naturel k, il existe une unique représentation irréductible $V^{(k)}$ de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ dont les poids sont $-k, -k+2, \ldots, k$ (et dont la dimension est k+1) ; la multiplicité de tous ces poids est 1, et ce sont là toutes les représentations irréductibles de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Comme les poids d'une somme directe de représentation sont l'union des poids des termes de la somme, et que les multiplicités s'ajoutent, on obtient facilement le résultat suivant :

Théorème 2.6.1. *Une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ est uniquement déterminée par ses poids, qui sont des entiers, et les multiplicités d'iceux. Pour toute fonction $m: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que*

(i) $m(k) = 0$ *pour tout* k *sauf un nombre fini.*
(ii) $m(k) = m(-k)$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.
(iii) Si $-k \leq \ell \leq k$ *et* $\ell \equiv k \pmod 2$ *alors* $m(\ell) \geq m(k)$.

il existe une et (à isomorphisme près) une seule représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ dont les poids sont les k tels que $m(k) > 0$, avec les multiplicités $m(k)$. La décomposition en somme de représentations irréductibles est unique (à isomorphisme et permutation près des termes), et le nombre de termes $V^{(k)}$ qui y interviennent est $m(k) - m(k+2)$ pour tout $k \geq 0$.

2.7. Représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$: "pléthysme".

Si $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$ et $W = \bigoplus_\beta W_\beta$ sont deux représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ (non nécessairement irréductibles). Alors $V \otimes W$ est une représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$, et s'écrit

$$V \otimes W = \bigoplus_\gamma \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V_\alpha \otimes W_\beta$$

Or si $x \otimes y \in V_\alpha \otimes W_\beta$, on a $H\cdot(x\otimes y) = (H\cdot x)\otimes y + x \otimes (H\cdot y) = (\alpha x)\otimes y + x \otimes (\beta y) = (\alpha+\beta)(x\otimes y)$. Par conséquent, les poids de $V \otimes W$ sont les sommes des poids de V et de ceux de W, et la multiplicité d'un poids γ de $V \otimes W$ s'obtient en sommant, sur toutes les écritures $\gamma = \alpha + \beta$ avec α un poids de V et β un poids de W le produit des multiplicités de ceux-ci.

Considérons par exemple le produit tensoriel $V \otimes V$ de deux copies de la représentation adjointe $V^{(2)}$ de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$. Les poids de $V^{(2)}$ sont $-2, 0, 2$. Ceux de $V^{(2)} \otimes V^{(2)}$ sont donc $-4, -2, 0, 2, 4$, avec multiplicités respectives $1, 2, 3, 2, 1$ (voir dessin ci-dessous) On a donc $V^{(2)} \otimes V^{(2)} = V^{(4)} + V^{(2)} + V^{(0)}$.

On peut se livrer à une analyse semblable de $S^n(V)$ et $\bigwedge^n(V)$ pour une représentation V de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ quelconque : les poids de $S^n(V)$ sont obtenus en prenant la somme de n poids de V, sans faire de distinction entre deux sommes qui s'obtiennent l'une à partir de l'autre par une simple permutation des termes, et les poids de $\bigwedge^n(V)$ sont obtenus en prenant la somme de n poids de V distincts, en ignorant encore une fois l'ordre.

En particulier, on remarque sans mal que $S^n(\mathbb{C}^2) = V^{(n)}$ (tout entier entre $-n$ et n de même parité que n s'écrit comme somme de n nombres égaux à $+1$ ou -1, de manière unique à permutation près). Ainsi, toutes les représentations irréductibles de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ sont des puissances symétriques de la représentation standard, $\mathbb{C}^2$.

Pour finir, prenons deux naturels $a \geq b$, et cherchons à écrire $V^{(a)} \otimes V^{(b)}$ comme somme de représentations irréductibles. Pour cela, on constate que les poids de $V^{(a)}$ sont $-a, -a+2, \ldots, a$ (avec multiplicité 1 partout), et ceux de $V^{(b)}$ sont $-b, -b+2, \ldots, b$. Le nombre $a+b$ s'écrit de manière unique comme somme d'un poids de $V^{(a)}$ et d'un poids de $V^{(b)}$. Le nombre $a+b-2$ s'écrit de deux façons : $a + (b-2)$ et $(a-2)+b$. Le nombre $a+b-4$ s'écrit de trois façons : $a+(b-4)$, $(a-2)+(b-2)$ et $(a-4)+b$. Et ainsi de suite jusqu'au nombre $a-b$ qui s'écrit de $b+1$ façons : $a+(-b)$, $(a-2)+(-b+2)$, etc, $(a-2b)+b$. Tous les entiers entre 0 et $a-b$ s'écrivent de $b+1$ façons. Les autres naturels n'ont pas d'écriture, et pour les entiers négatifs, il suffit de regarder leur valeur absolue. Pour résumer, les poids et multiplicés de $V^{(a)} \otimes V^{(b)}$ sont donnés par :

Poids	$a+b$	$a+b-2$	$a+b-4$	$\cdots$	$a-b$	$a-b-2$	$\cdots$	$b-a$	$\cdots$	$-a-b$
Multiplicités	1	2	3	$\cdots$	$b+1$	$b+1$	$\cdots$	$b+1$	$\cdots$	1

Et on en déduit la décomposition en somme directe de représentations irréductibles :

$$V^{(a)} \otimes V^{(b)} \cong V^{(a+b)} \oplus V^{(a+b-2)} \oplus \cdots \oplus V^{(b-a)}$$

L'exemple suivant est particulièrement limpide : considérons le produit $V^{(1)} \otimes V^{(1)}$ de deux copies de la représentation standard $V^{(1)} = \mathbb{C}^2$. Pour faire plus joli, considérons plutt le produit tensoriel de $V^{(1)}$ avec son dual (qui lui est isomorphe en tant que représentation comme en tant qu'espace vectoriel). La décomposition obtenue est $V^{(1)} \otimes V^{(1)} \cong V^{(2)} \oplus V^{(0)}$. Comment cela s'interprète-t-il ? Le produit tensoriel de deux vecteurs $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ (vecteur du dual) peut s'identifier à la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

Si on fait opérer $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ sur le dual de $\mathbb{C}^2$ par multiplication à droite, avec un signe moins[†], on voit aisément qu'elle opère sur $V^{(1)} \otimes (V^{(1)})^* \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ par commutateurs, $X \cdot A = [X, A]$. En écrivant une matrice 2×2 comme somme d'une matrice de trace nulle et d'une homothétie, on retrouve sur celles-là la représentation adjointe $V^{(2)}$, et sur celles-ci la représentation triviale $V^{(0)}$.

2.8. Représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Nous avons vu que toutes les représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ s'écrivent

$$S^{k_1}(U) \oplus S^{k_2}(U) \oplus \cdots \oplus S^{k_r}(U)$$

où U est la représentation standard. Cette écriture a un avantage immense : il s'agit d'une succession d'opérations sur la représentation standard. Or on sait que la représentation standard de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ provient d'une représentation du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, appelée elle-aussi représentation standard, à savoir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

lorsque $ad - bc = 1$. On en conclut que toutes les représentations de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$ se remontent en des représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (ce qui ne sera pas le cas, e.g. pour $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$).

En fait, les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ont une interprétation particulièrement simple : c'est celle des *changements de variables dans les polynmes homogènes*. Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on définit, pour tout polynme $P(X, Y)$ homogène :

$$(g \cdot P)(X, Y) = P(dX - bY, -cX + aY)$$

Cette action sur les polynmes homogènes de degré n correspond précisément à $S^n(U)$.

Pour retrouver les représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on commence par écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 sur $P(dX - bY, -cX + aY)$:

$$P(dX - bY, -cX + aY) = P(X, Y) + (d-1)X\partial_X P - bY\partial_X P - cX\partial_Y P + (a-1)Y\partial_Y P + \cdots$$

Par conséquent, en différentiant en l'identité (on note δ la différentielle pour éviter les conflits de notation) par rapport aux quatre variables a, b, c, d, on trouve :

$$\delta P(dX - bY, -cX + aY) = +\delta d\, X\partial_X P - \delta b\, Y\partial_X P - \delta c\, X\partial_Y P + \delta a\, Y\partial_Y P$$

Ce qui donne la représentation de $\underline{\mathtt{sl}}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix} \cdot P = u(Y\partial_Y - X\partial_X)P - vY\partial_X P - wX\partial_Y P$$

Exercice : Trouver les formules de changement de base reliant $X^n, \ldots, Y^n$ à la base de $V^{(n)}$ trouvée au 2.4. En particulier, trouver le vecteur de plus haut poids.

[†] C'est la convention pour le dual d'une représentation ; voir section 1.7.

Bibliographie.

[1] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory : A First Course*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics (129), Readings in Mathematics. Chapitres 8–11 et appendice B.
[2] D. Eisenbud, *Commutative Algebra...*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics (150). Appendice A2.
[3] J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin. Chapitres I–IV.
[4] J.-P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Benjamin. LA7.
[5] R. Mneimné, F. Testard, *Groupes de Lie Classiques*, Hermann.