Composition de Mathématiques

Préliminaires

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ qui s'annulent en x. Par hypothèse, cet ensemble n'est pas vide. Il admet donc un PGCD (qu'on suppose unitaire), noté P_x. Si $Q(x) = 0$ alors $Q \in \mathcal{P}$ donc $P_x \mid Q$. D'autre part, $X - x$ (qui est dans $E[X]$) divise tous les polynômes de $\mathcal{P}$, donc aussi leur PGCD[*], donc $P_x(x) = 0$; et par suite, $P_x \mid Q$ implique $Q(x) = 0$. On a donc l'équivalence $Q(x) = 0 \iff P_x \mid Q$. D'autre part, si R est un autre polynôme vérifiant les mêmes propriétés, alors $R|P_x$ et $P_x|R$, et comme tous deux sont unitaires, $R = P_x$, ce qui prouve l'unicité. On note aussi que P_x est irréductible sur $K[X]$: si $P_x = RS$ (avec R et S unitaires), on peut supposer $R(x) = 0$, auquel cas $R \in \mathcal{P}$ donc $P_x \mid R$, donc $S = 1$.

Ecrivons $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} Kx^i$: on veut montrer que $K(x) = L$. Premièrement, la somme est directe : en effet, si $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = 0$, alors on a $R(x) = 0$ avec $R(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, et donc $P_x|R$; mais comme $\deg R < n$, on doit avoir $R = 0$ soit $a_i = 0$ pour tout i. Deuxièmement, $K(x) \supseteq L$, car $K(x)$ est un corps, donc contient x^i pour tout $0 \le i \le n-1$, donc tout élément de L. Il reste à démontrer l'inclusion réciproque. On a évidemment $K \subseteq L$ et $x \in L$, et il ne nous reste plus qu'à prouver que L est un corps.

L est un espace vectoriel, cela est évident. On a $x^n \in L$ puisque $x^n = x^n - P_x(x)$ (et $x^n - P_x(x)$ est de degré inférieur à n comme $P_x(X)$ est unitaire de degré n). On vérifie alors (par une récurrence immédiate) que $x^m \in L$ pour tout naturel m. Il n'est alors pas dur de voir que L est un anneau (intègre) : il suffit de développer $(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i)$. Il ne reste plus qu'à montrer que si $y \in L$ et $y \neq 0$, alors $y^{-1} \in L$: écrivons tout d'abord $y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = R(x)$ où $R(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$; $R(x) \neq 0$ donc P_x ne divise pas R, et comme P_x est irréductible sur $K[X]$, P_x et R sont premiers entre eux, donc il existe U et V tels que $1 = UP_x + VR$ (Bezout), donc $V(x)R(x) = 1$, et alors $V(x)$ est l'inverse de y (dans E), et comme c'est un polynôme en x, on a $y^{-1} \in L$. Ce qu'il fallait démontrer.

Si $K(x)$ est de dimension finie sur K, alors la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée donc il existe une suite presque nulle (a_n) telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$, et si on pose $R(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ alors $R(x) = 0$ donc x est algébrique sur K.

2. L'application $\varphi\colon K(X) \to K(x), R \mapsto R(x)$ est évidemment un morphisme de corps. En tant que tel il est injectif[†], et il n'y a plus qu'à montrer la surjectivité. Mais $\operatorname{im}\varphi$ est sans doute un corps contenant K et x, donc $K(x) \subseteq \operatorname{im}\varphi$. Et puisque $K(x) \supseteq \operatorname{im}\varphi$, on a $K(x) = \operatorname{im}\varphi$ donc φ est un isomorphisme de corps.

I

1. On a $D(1) = D(1 \times 1) = D(1) + D(1)$ donc $D(1) = 0$. On a $D(u) = D(v \times (u/v)) = uD(v)/v + vD(u/v)$ donc $D(u/v) = (vD(u) - uD(v))/v^2$. On montre sans mal par récurrence que $D(u^n) = nu^{n-1}D(u)$. K_{cst} contient 0 et 1 ; si a et b sont des constantes, alors on vérifie aussitôt que $a + b$, ab et $1/a$ (pour $a \neq 0$) sont des constantes ;

[*] Le PGCD d'un ensemble de polynômes ne dépend pas du corps de base.

[†] On rappelle la démonstration : si $\varphi(t) = 0$ et $t \neq 0$ alors $\varphi(t^{-1}t) = 0$ ce qui est impossible.

donc K_{cst} est bien un sous-corps de K. On a $D(uv)/(uv) = D(u)/u + D(v)/v$, et $D(u/v)/(u/v) = D(u)/u - D(v)/v$. Et $D(u)/u = D(v)/v$ ssi $D(u)/u - D(v)/v = 0$ soit ssi $D(u/v)/(u/v) = 0$ soit ssi u/v est une constante.

2. On a $D(P(u)) = D(\sum_i a_i u^i) = \sum_i D(a_i u^i) = \sum_{i\geq 1} i a_i u^{i-1} D(u) + \sum_i D(a_i) u^i = P'(u)D(u) + P^D(u)$.

3. On note tout d'abord que, clairement, $\prod_{j\in J} Q_j$ est sans facteur carré, ainsi que tous ses diviseurs. Si on écrit $\sum_{j\in J} \frac{P_j}{Q_j} = \frac{R}{S}$ avec R et S premiers entre eux, alors S divise évidemment $\prod_{j\in J} Q_j$, donc S est sans facteur carré.

Supposons que Q ne divise pas $D(Q)$. Alors il existe un facteur irréductible U de Q qui ne divise pas $D(Q)$. Or $D(P/Q) = (QD(P) - PD(Q))/Q^2$, et U ne divise pas $QD(P) - PD(Q)$ car il divise $QD(P)$ mais pas $PD(Q)$. Par suite, si on réduit la fraction : $D(P/Q) = \frac{R}{S}$ avec R et S premiers entre eux, U^2 devra diviser S (puisqu'il divise Q^2 mais que l'irréductible U ne divise pas $QD(P) - PD(Q)$). Or ceci est impossible, S étant sans facteurs carrés. Donc Q divise $D(Q)$.

Si Q_j ne divise pas P_j, il y a un facteur irréductible T de Q_j qui n'est pas un facteur de P_j. On note aussi que T n'est un facteur d'aucun des autres $Q_{j'}$. Par suite, T divise le dénominateur de

$$\sum_{j'\in J} \frac{P_{j'}}{Q_{j'}} = \frac{\sum_{j'\in J} P_{j'} \prod_{j''\neq j'} Q_{j''}}{\prod_{j''\in J} Q_{j''}}$$

et tous les termes du numérateur sauf $P_j \prod_{j''\neq j} Q_{j''}$. Donc T divise S. Or S divise Q^2. Donc T divise Q^2, donc Q, et donc Q_j et Q ne sont pas premiers entre eux.

II

1. On a vu $D(P) = P'D(X) + P^D$. Comme $D(X) \in K$ et P' et P^D sont dans $K[X]$, il s'ensuit que $D(P) \in K[X]$. Comme le degré de P' est inférieur strictement à celui de P (sauf si $P = 0$, mais ce cas ne semble pas particulièrement digne d'une attention soutenue), $D(P)$ a le même coefficient d'ordre n que P^D (et tous ses coefficients d'ordre supérieur sont nuls). Par conséquent, on a $\deg D(P) \leq \deg P$, et $\deg D(P) < \deg P$ ssi $D(a_n) = 0$, autrement dit ssi le coefficient dominant de P est une constante.

2. Pour un polynôme Q unitaire, les constatations que nous venons de faire montrent que $\deg D(Q) < \deg Q$. Dans ce cas, si Q divise $D(Q)$, on doit avoir $D(Q) = 0$, c'est-à-dire que Q est une constante. En particulier, $Q \in K$, et il s'ensuit que $Q = 1$. Et réciproquement, il n'est pas beaucoup trop difficile de voir que 1 divise $D(1) = 0$.

Soit $P = \sum_i a_i X^i$ un polynôme tel que $D(P) \in K$, et soit $n = \deg P$. Supposons $n > 1$. Alors $0 = \deg D(P) < n$, et par suite le coefficient dominant a_n de P est une constante (cf. *supra*). Mais le coefficient de degré $n-1$ de $D(P)$ doit être nul, soit $D(a_{n-1}) + n a_n D(X) = 0$. On vient de voir que a_n est une constante, donc $D(a_{n-1} + n a_n X) = 0$, et comme $K_{\text{cst}} \subseteq K$, on a $a_n = 0$, ce qui n'est pas très normal puisque par hypothèse $n = \deg P$. Par suite, l'hypothèse $n > 1$ ne tient pas et $\deg P \leq 1$. On peut alors écrire $P = cX + g$, avec $(c, g) \in K^2$. Mais alors $D(P) = D(c)X + cD(X) + g$, et donc $D(c) = 0$, donc $c \in K_{\text{cst}}$. Donc tout polynôme P vérifiant $D(P) \in K$ s'écrit sous la forme $cX + g$ avec $c \in K_{\text{cst}}$ et $c \in K$. Réciproquement, on vérifie immédiatement que tous ces polynômes vérifient bien $D(P) \in K$.

3. Ecrivons $R = P/Q$ avec P et Q premiers entre eux, et Q choisi unitaire. Alors on a $D(P/Q) \in K$, et on applique le résultat de la question I3. On en conclut que Q divise $D(Q)$, donc que $Q = 1$ d'après la question précédente. Celle-ci donne alors le résultat voulu.

4. Une somme de Liouville dans $K(X)$ s'écrit

$$D(R) + \sum_i c_i \frac{D(S_i)}{S_i}$$

R et les S_i étant des éléments de $K(X)$, les c_i des éléments de K_{cst}. On écrit alors $S_i = \frac{f_i \prod_l P_{i,l}}{\prod_l Q_{i,l}}$, où $f_i \in K$ et les $P_{i,l}$ et $Q_{i,l}$ sont des polynômes unitaires, irréductibles (et les $P_{i,l}$ et les $Q_{i,l}$ n'ayant aucun élément en commun). D'après les propriétés étudiées de la dérivée logarithmique, on a alors $\frac{D(S_i)}{S_i} = \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_l \frac{D(P_{i,l})}{P_{i,l}} - \sum_l \frac{D(Q_{i,l})}{Q_{i,l}}$. Quitte à réindexer, on peut alors écrire :

$$f = D(R) + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$

avec les conventions de l'énoncé (les répétitions éventuelles des $P_{i,l}$ ou des $Q_{i,l}$ sont absorbées dans la définition des d_j).

Posons $R = \frac{P}{Q}$, avec Q unitaire. On a alors :

$$D\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{f - \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}}{1} - \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$

Sous cette forme, le résultat de la question I3 s'applique, et donne $Q \mid D(Q)$. Comme Q est unitaire, $Q = 1$. Mais alors on a $\operatorname{pgcd}(Q_j, Q) = 1$ pour tout j, donc $Q_j \mid (d_j D(Q_j))$ pour tout j, donc par le même raisonnement, $Q_j = 1$ pour tout j. Il reste :

$$D(P) = f - \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$$

Mais alors $D(P) \in K$, donc $P = cX + g$ avec les conventions usuelles, et alors

$$f - cD(X) = D(g) + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$$

(comme les notations de ce sujet sont merveilleusement bien imaginées!). Ce qu'il fallait démontrer.

5. Au moyen de l'isomorphisme de corps trouvé à la question 02, nous identifierons $K(v)$ avec le corps des fractions rationnelles à une variable notée v sur le corps K. On a alors une dérivation sur E qui fait de E un sur-corps différentiel de K. Comme de plus $D(v) = \frac{D(u)}{u} \in K$, on est bien dans le cas de figure déjà étudié. $f \in K$ étant une somme de Liouville dans E, on a vu qu'il existait $c \in K_{\text{cst}}$ tel que $f - cD(v)$ fût une somme de Liouville dans K. Mais alors $f = (f - cD(v)) + c\frac{D(u)}{u}$ est certainement une somme de Liouville dans K. C'est le théorème de descente de Liouville.

III

1. On a vu $D(P) = P'D(X) + P^D$. Comme $D(X) \in K[X]$ et P' et P^D sont dans $K[X]$, il s'ensuit que $D(P) \in K[X]$. Le degré de P' est $\deg P - 1$ (pour $\deg P \geq 1$), et celui de $D(X)$ est 1. Par suite, on a $\deg D(P) \leq \deg P$. Cette relation est par ailleurs valable pour $\deg P < 1$.

2. Tout d'abord, pour P de la forme aX^n, on a bien $P \mid D(P)$. D'autre part, si $P \mid D(P)$, comme par ailleurs $\deg D(P) \leq \deg P$, on en conclut que $D(P)/P \in K$. Posons $l = \frac{D(P)}{P}$. Supposons par l'absurde que P ne soit pas sous la forme voulue : alors il existe deux coefficients a_r et a_s, de degrés r et s respectivement, de P qui ne sont pas nuls. Mais il n'est pas dur de voir que les coefficients de degrés r et s de $D(P)$ sont respectivement $D(a_r) + ra_r\frac{D(X)}{X}$ et $D(a_s) + sa_s\frac{D(X)}{X}$. Or ce sont aussi la_r et la_s par définition de l. Par suite, on a $\frac{D(a_r)}{a_r} + r\frac{D(X)}{X} = \frac{D(a_s)}{a_s} + s\frac{D(X)}{X} = l$, donc

$$\frac{D\left(\frac{a_r X^r}{a_s X^s}\right)}{(a_r X^r)/(a_s X^s)} = 0$$

et donc $\frac{a_r X^r}{a_s X^s} \in K$, ce qui n'est pas possible. Donc P a bien la forme voulue.

3. On écrit $R = P/Q$, et alors $D\left(\frac{P}{Q}\right) = W$ où $W \in K[X]$. On applique le résultat de la question I3 (1 est un polynôme sans facteur carré !). On en déduit que Q divise $D(Q)$. Par conséquent, on vient de voir que Q s'écrit sous la forme aX^k. On peut donc écrire R comme une somme *finie* de fractions rationnelles de la forme a_iX^i, i pouvant éventuellement être négatif. Mais on voit immédiatement que $D(a_iX^i) = b_iX^i$ avec $b_i \in K$: par suite, comme tous les b_i doivent s'annuler pour $i < 0$, il en va de même des a_i (car $D(a_iX^i) = 0$ implique $a_iX^i \in K$...). Par conséquent, R est un polynôme. Par ailleurs, si $n = \deg P$, on a $a_n \neq 0$, donc $D(a_nX^n) \neq 0$ (on commence à le savoir). Par suite, $b_n \neq 0$, donc $\deg D(P) = n$. La seule exception que j'ai abusivement omise est le cas $i = 0$, car si $R \in K \setminus \{0\}$, on peut avoir $D(R) = 0$ ce qui n'est, il est vrai, pas de même degré.

4. Comme dans la question II4, on écrit :

$$f = D(R) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j\in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$

Posons $R = \frac{P}{Q}$, avec Q unitaire. On a alors :

$$D\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{f - \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}}{1} - \sum_{j\in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$

On applique alors le résultat de la question I3 : on en déduit $Q \mid D(Q)$, donc $Q = X^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Si pour une valeur de j, $Q_j \neq X$, alors Q_j (qui est irréductible) est premier avec Q, et la question I3 donne $Q_j \mid D(Q_j)$ et par suite $Q_j = 1$, ce qui est impossible car les Q_j sont de degré non nul. Il ne reste que X comme Q_j possible. Mais alors on a

$$D(R) = f - \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} - c\frac{D(X)}{X}$$

Donc $D(R) \in K$, et par suite $R \in K$. Mais alors

$$f - c\frac{D(X)}{X} = D(R) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$$

et $f - c\frac{D(X)}{X}$ est une somme de Liouville dans K.

5. On va montrer que toute somme de Liouville $f \in K$ dans E est une somme de Liouville dans K. De même que précédemment, on identifie E à $K(X)$. On a $\frac{D(v)}{v} = D(u) \in K$, ce qui permet d'utiliser les résultats de cette partie. On sait alors que si $f \in K$ est une somme de Liouville dans E, il existe $c \in K_{\text{cst}}$ tel que $f - c\frac{D(v)}{v}$ soit une somme de Liouville dans K. Mais $f = (f - c\frac{D(v)}{v}) + D(cu)$, et par conséquent, f est une somme de Liouville dans K. Ce qu'il fallait démontrer.

IV

1. Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où u est inversible. On a $u\Omega_u(u) = \chi_u(u) - \chi_u(0) = -\det(-u)$, donc $uu^\sharp = \det(u)$ donc $u^\sharp = \det(u)u^{-1}$, et $A^\sharp = \det(A)A^{-1}$, qui est bien la transposée de la matrice des cofacteurs. Si u n'est pas inversible, écrivons $u_\lambda = u - \lambda$ pour $\lambda \in K$. Alors $\det(u_\lambda)$ est clairement un polynôme en λ, donc n'a qu'un nombre fini de racines ; par suite (K étant infini), il existe une infinité de valeurs de λ pour lesquelles u_λ est inversible. Soit A_λ la matrice associée à u_λ. Notons $A_\lambda^\flat$ la transposée de la matrice des cofacteurs de A_λ : chaque coefficient de $A_\lambda^\flat$ est un polynôme de λ (ceci est assez clair vu la définition du déterminant et d'un cofacteur). Mais d'autre part, il est clair que chaque coefficient de $A_\lambda^\sharp$ est un polynôme de λ. Or on sait que pour tout λ tel que u_λ soit inversible (et il y en a une infinité) on a $A_\lambda^\flat = A_\lambda^\sharp$. Par suite, cette relation est vraie pour tout λ, et en particulier pour $\lambda = 0$.

2. Les lois de distributivité et d'associativité impliquent clairement que l'application $x \mapsto m_x$ est K-linéaire. Comme de plus la trace (sur les endomorphismes) est K-linéaire, il s'ensuit que la trace (sur les éléments du corps) l'est. On a sans doute $m_x \circ m_{x'} = m_{xx'}$, et par suite $N(xx') = \det(m_{xx'}) = \det(m_x \circ m_{x'}) = \det(m_x)\det(m_{x'}) = N(x)N(x')$. Pour $\lambda \in K$, $N(\lambda) = \det(m_\lambda) = \det(\lambda I_E) = \lambda^n$.

Si $x = 0$, $m_x = 0$ donc $(m_x)^\sharp = 0$, donc $x^\sharp = 0$ et est bien unique. Sinon, m_x est inversible (d'inverse $m_{x^{-1}}$), et on a $(m_x)^\sharp = \det(m_x)(m_x)^{-1} = N(x)m_{x^{-1}} = m_{N(x)x^{-1}}$. On peut alors définir $x^\sharp = N(x)x^{-1}$. L'unicité résulte de ce que $x \mapsto m_x$ est injective (son noyau est assurément $\{0\}$). On a bien $x^\sharp x = xx^\sharp = N(x)$ dans tous les cas de figure.

3. Les calculs de cette section sont extrêmement pénibles ; pour tenter de les simplifier, nous allons introduire un nouveau formalisme, celui des *matrices trouées* qui permet d'exprimer de manière concise les différents indices de sommation, et d'éviter les

$(-1)^{i+j+k+l+1}$ et autres horreurs. L'exposé qui va suivre, bien qu'un peu long, est en vérité plus économique qu'il n'y paraît, et a l'avantage supplémentaire de l'élégance.

Une matrice trouée est une application $M\colon (i,j) \mapsto M_{i,j}$ de $[\![1,n]\!]^2$ dans K, munie de deux parties (éventuellement vides) de $[\![1,n]\!]$ (les *lignes manquantes* et les *colonnes manquantes*) ayant même cardinal et d'une bijection φ_M de l'une sur l'autre, et telle que $M_{i,j} = 0$ si la ligne i est manquante ou bien si la colonne j est manquante. Toutefois, il se peut fort bien qu'on ait $M_{i,j} = 0$ sans que la ligne i ou la colonne j soit manquante. Une *matrice vide* sera une matrice trouée dont toutes les lignes et colonnes sont manquantes (il existe $n!$ matrices vides distinctes). Par ailleurs, il est évident que toute matrice (au sens usuel) peut être considérée comme une matrice trouée, en posant qu'elle n'a aucune ligne ni colonne manquante (l'application φ étant alors l'application vide).

Lorsque l'ensemble des colonnes manquantes de la matrice trouée M est égal à l'ensemble des lignes manquantes de la matrice trouée N, on définit une matrice trouée MN de la façon suivante : l'ensemble des lignes manquantes de MN est le même que pour M, l'ensemble des colonnes manquantes de MN est le même que pour N, et on définit $(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k}N_{k,j}$, et $\varphi_{MN}(i) = \varphi_N(\varphi_M(i))$. On voit aussitôt que MN ainsi définie est bien une matrice trouée, et coïncide avec le produit ordinaire pour des matrices ordinaires.

Donnés $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, et une matrice trouée M dans laquelle la k-ième ligne et la l-ième colonnes ne sont pas manquantes, on définit une nouvelle matrice trouée $M_{\langle k,l\rangle}$ comme suit : l'ensemble des lignes manquantes de $M_{\langle k,l\rangle}$ est le même que celui de M, union $\{k\}$, l'ensemble des colonnes manquantes de $M_{\langle k,l\rangle}$ est le même que celui de M, union $\{l\}$, et pour $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$ et $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{l\}$, on a $M_{\langle k,l\rangle i,j} = M_{i,j}$; enfin, $\varphi_{M_{\langle k,l\rangle}}(i) = j$ si $\varphi_M(i) = j$, et $\varphi_{M_{\langle k,l\rangle}}(k) = l$ Autrement dit, $M_{\langle k,l\rangle}$ est obtenue en retirant la k-ième ligne et la l-ième colonne de M. On remarque tout de suite que $M_{\langle k,l\rangle\langle k',l'\rangle} = M_{\langle k',l'\rangle\langle k,l\rangle}$ (quand cela a un sens).

Nous pouvons à présent définir le déterminant d'une matrice trouée. Cela se fait par récurrence sur le nombre de lignes (ou de colonnes, ce qui revient au même) qui ne sont pas trouées. On commence donc par le déterminant d'une matrice vide M : celui-ci est $\det M = \varepsilon(\varphi_M)$ (la signature de φ_M, qui n'est autre qu'un élément de $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique de n objets). Si M est une matrice trouée non vide, elle a une ligne m qui n'est pas manquante, et alors on pose :

$$\det M = \sum_{l} M_{m,l} \det M_{\langle m,l\rangle}$$

la somme étant pris sur les colonnes l qui ne sont pas manquantes. Il faut naturellement vérifier que $\det M$ ne dépend pas du choix de m : ceci se fait en donnant une autre définition de $\det M$, pour une matrice trouée M quelconque :

$$\det M = \sum_{\psi:\mathcal{L}\to\mathcal{C}} \varepsilon(\psi \cup \varphi_M) \prod_{k\in\mathcal{L}} M_{k,\psi(k)}$$

où $\mathcal{L}$ est l'ensemble des lignes qui ne sont *pas* manquantes et $\mathcal{C}$ l'ensemble des colonnes qui ne sont pas manquantes. L'équivalence entre les deux définitions est aisée à voir. Et il est clair que si M est une matrice ordinaire, $\det M$ a le même sens en tant que matrice trouée qu'en tant que matrice ordinaire.

Dernières définitions... Donnée une matrice trouée M, on définit $M^\sharp$ comme suit : l'ensemble des lignes manquantes de $M^\sharp$ est celui des colonnes manquantes de M, l'ensemble des colonnes manquantes de $M^\sharp$ est l'ensemble des lignes manquantes de M, $\varphi_{M^\sharp} = \varphi_M^{-1}$, et pour r et s une ligne et une colonne respectivement non manquantes de $M^\sharp$, on a $M^\sharp_{r,s} = \det M_{\langle s,r\rangle}$ (on peut penser qu'il manque un "moins un puissance quelque chose" ; il n'en est rien, tout l'intérêt des matrices trouées étant d'éviter ces signes gênants). Dans le cas où M est une matrice ordinaire, cette définition de $M^\sharp$ coincide avec la définition ordinaire (cela est essentiellement trivial). On a, comme pour les matrices ordinaires, $M^\sharp M = (\det M)I$ où I est une matrice trouée diagonale ayant les mêmes colonnes et lignes manquantes que $M^\sharp M$ et le même φ, et de même pour $MM^\sharp$. Cependant, il est en général incorrect d'écrire $M^\sharp M = MM^\sharp$ (ces deux matrices trouées n'ont pas nécessairement les mêmes lignes ou colonnes manquantes). Pour une matrice trouée M, on définit $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^n M_{i,i}$, et $D(M)$ a le sens évident qu'on lui devine.

On peut enfin passer à la démonstration : celle-ci procède par récurrence sur le nombre de colonnes (ou de lignes, ce qui revient au même) qui ne sont pas manquantes dans A. Si A est une matrice vide, on a $D(1) = 0 = \operatorname{tr}(A^\sharp D(A))$ et l'assertion est vraie. Supposons à présent que A ait une ligne m qui ne soit pas manquante. On a alors :

$$\begin{aligned}
D(\det A) &= D\left(\sum_l A_{m,l} \det A_{\langle m,l\rangle}\right)\\
&= \sum_l D(A)_{m,l} \det A_{\langle m,l\rangle} + \sum_l A_{m,l} D(\det A_{\langle m,l\rangle})
\end{aligned}$$

(La sommation est effectuée sur l'ensemble des colonnes qui ne sont pas manquantes dans A). On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour évaluer $D(\det A_{\langle m,l\rangle})$:

$$\begin{aligned}
D(\det A) &= \sum_l D(A)_{m,l} \det A_{\langle m,l\rangle} + \sum_l A_{m,l} \operatorname{tr}((A_{\langle m,l\rangle})^\sharp D(A_{\langle m,l\rangle}))\\
&= \sum_l D(A)_{m,l} \det A_{\langle m,l\rangle} + \sum_l A_{m,l} \sum_{i\neq m} \sum_{j\neq l} (A_{\langle m,l\rangle})^\sharp_{j,i} D(A)_{\langle m,l\rangle i,j}
\end{aligned}$$

i est supposé parcourir les lignes non manquantes de A, à l'exception de m, et j les colonnes non manquantes de A, à l'exception de l. En utilisant la définition de $(A)^\sharp_{\langle m,l\rangle}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
D(\det A) &= \sum_l D(A)_{m,l} A^\sharp_{l,m} + \sum_l \sum_{i\neq m} \sum_{j\neq l} A_{m,l} \det A_{\langle m,l\rangle\langle i,j\rangle} D(A)_{\langle m,l\rangle i,j}\\
&= \sum_l D(A)_{m,l} A^\sharp_{l,m} + \sum_l \sum_{i\neq m} \sum_{j\neq l} A_{\langle i,j\rangle m,l} \det A_{\langle i,j\rangle\langle m,l\rangle} D(A)_{i,j}
\end{aligned}$$

Mais la somme sur les l de la somme sur les j différents de l équivaut clairement à la somme sur les j de la somme sur les l différents de j. Donc :

$$\begin{aligned} D(\det A) &= \sum_l D(A)_{m,l} A^\sharp_{l,m} + \sum_{i\neq m} \sum_j \sum_{l\neq j} D(A)_{i,j} A_{\langle i,j\rangle m,l} \det A_{\langle i,j\rangle\langle m,l\rangle} \\ &= \sum_l D(A)_{m,l} A^\sharp_{l,m} + \sum_{i\neq m} \sum_j D(A)_{i,j} \sum_{l\neq j} A_{\langle i,j\rangle m,l} \det A_{\langle i,j\rangle\langle m,l\rangle} \end{aligned}$$

La sommation sur l correspond justement à la définition du déterminant de $A_{\langle i,j\rangle}$, soit :

$$\begin{aligned} D(\det A) &= \sum_l D(A)_{m,l} A^\sharp_{l,m} + \sum_{i\neq m} \sum_j D(A)_{i,j} \det A_{\langle i,j\rangle} \\ &= \sum_j D(A)_{m,j} A^\sharp_{j,m} + \sum_{i\neq m} \sum_j D(A)_{i,j} A^\sharp_{j,i} \\ &= \sum_j \sum_i D(A)_{i,j} A^\sharp_{j,i} \\ &= \operatorname{tr}(A^\sharp D(A)) \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

4. Les deux membres gauche et droit de $(\star)$ sont évidemment K-linéaires. Pour montrer qu'ils sont égaux, il suffit donc de montrer qu'ils le sont sur chaque élément de $\mathcal{B}$. Soit donc $j \in [\![1, n]\!]$, et on va comparer $m_x \circ \Delta(e_j) + m_{D(x)}(e_j)$ et $\Delta \circ m_x(e_j) + m^D_x(e_j)$. Pour cela, examinons $D(xe_j)$. D'une part, celui-ci vaut $xD(e_j) + D(x)e_j = m_x \circ \Delta(e_j) + m_{D(x)}(e_j)$ (car $D(e_j) = \Delta(e_j)$). D'autre part, $D(xe_j)$ vaut aussi

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^n D(a_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Delta(e_i) + \sum_{i=1}^n D(a_{ij}) e_i$$

c'est-à-dire $\Delta \circ m_x(e_j) + m^D_x(e_j)$ (on a utilisé la K-linéarité de Δ). On a donc bien $m_x \circ \Delta(e_j) + m_{D(x)}(e_j) = \Delta \circ m_x(e_j) + m^D_x(e_j)$, donc, le choix de j étant arbitraire, $m_x \circ \Delta + m_{D(x)} = \Delta \circ m_x + m^D_x$.

La relation $(\star)$ trouvée *supra* peut encore s'écrire $m_{D(x)} = \Delta \circ m_x - m_x \circ \Delta + m^D_x$, et on a donc $\operatorname{tr}(m_{D(x)}) = \operatorname{tr}(\Delta \circ m_x - m_x \circ \Delta) + \operatorname{tr}(m^D_x)$. Mais la trace d'un commutateur (i.e. d'un crochet de Lie, i.e. d'une expression de la forme $u \circ v - v \circ u$) est nulle, donc $\operatorname{tr}(m_{D(x)}) = \operatorname{tr}(m^D_x) = D(\operatorname{tr}(m_x))$ soit $\operatorname{tr}(D(x)) = D(\operatorname{tr}(x))$.

5. On peut clairement se limiter à $x \neq 0$. On a alors $\operatorname{tr}(x^\sharp D(x)) = \operatorname{tr}(m_{x^\sharp} m_{D(x)})$, et en utilisant la relation $(\star)$, on voit que $m_{D(x)} = \Delta \circ m_x - m_x \circ \Delta + m^D_x$. Par conséquent, $\operatorname{tr}(x^\sharp D(x)) = \operatorname{tr}(m_{x^\sharp} \circ \Delta \circ m_x) - \operatorname{tr}(m_{x^\sharp} \circ m_x \circ \Delta) + \operatorname{tr}(m^\sharp_x m^D_x)$. Or $m_{x^\sharp} = N(x) m_x^{-1}$. Par suite,

$$\operatorname{tr}(x^\sharp D(x)) = N(x)\left[\operatorname{tr}(m_x^{-1} \circ \Delta \circ m_x) - \operatorname{tr}(\Delta)\right] + \operatorname{tr}(m^\sharp_x m^D_x)$$

Mais les applications linéaires $m_x^{-1} \circ \Delta \circ m_x$ et Δ sont conjuguées donc ont même trace, donc $\operatorname{tr}(x^\sharp D(x)) = \operatorname{tr}(m^\sharp_x m^D_x) = \operatorname{tr}(A^\sharp D(A))$ où A est la matrice qui représente m_x dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $\operatorname{tr}(x^\sharp D(x)) = D(\det A) = D(\det m_x) = D(N(x))$. Ce qu'il fallait démontrer.

Pour $x \neq 0$, on a $x^\sharp = N(x)x^{-1}$, donc la formule s'écrit $\operatorname{tr}(N(x)x^{-1}D(x)) = D(N(x))$, soit (comme $N(x) \neq 0$ puisque x est inversible)

$$\frac{D(N(x))}{N(x)} = \operatorname{tr}\left(\frac{D(x)}{x}\right)$$

6. Théorème de descente : si E est un surcorps différentiel de K de dimension finie, et si $f \in K$ est une somme de Liouville dans E, alors f est une somme de Liouville dans K. Démonstration : écrivons

$$f = D(g) + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$$

où $f \in K$, $g \in E$, $c_i \in K_{\text{cst}}$, $f_i \in E \setminus \{0\}$. On a alors

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} D(g) + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}\left(c_i \frac{D(f_i)}{f_i}\right)$$

Mais $\operatorname{tr} f = nf$, $\operatorname{tr} D(g) = D(\operatorname{tr}(g))$ et $\operatorname{tr}\left(c_i \frac{D(f_i)}{f_i}\right) = c_i \frac{D(N(f_i))}{N(f_i)}$, donc

$$f = \frac{D(\operatorname{tr} g)}{n} + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{n} \cdot \frac{D(N(f_i))}{N(f_i)}$$

ce qui montre que f est une somme de Liouville dans K.

V

1. Soit $y \in K(x)$: on va montrer $D(y) \in K(x)$. Il est clair que y est algébrique sur K (car s'il était transcendant, il engendrerait un espace vectoriel de dimension infinie sur K inclus dans $K(x)$, ce qui n'est pas possible). Il existe donc $P \in K[X]$ tel que $P(y) = 0$, et on peut supposer de plus $P'(y) \neq 0$ (ce qui est le cas, e.g. si P est le polynôme minimal de y). Mais alors $D(P(y)) = 0$ soit $P'(y)D(y) + P^D(y) = 0$, et donc $D(y) = -P^D(y)/P'(y)$ donc $D(y) \in K(x)$. Ce qu'il fallait démontrer.

2. Soient $(K_i)_{0 \leq i \leq m}$ les corps comme définis dans l'énoncé, avec $K_0 = K$ et $K_m = E$. On a $D(K_i) \subseteq K_i$ pour tout i (pour une extension algébrique, on utilise la question V1, et pour une extension par un logarithme ou un exponentiel, c'est clair). Par ailleurs, les K_i ont tous le même corps des constantes K_{cst} (qui est dans K). Si $f = D(g)$ avec $f \in K$ et $g \in E$, alors f est une somme de Liouville dans E. En utilisant le théorème de descente approprié (résultats des questions IV6, II5 ou III5 selon que E est respectivement de dimension sur K_{m-1}, un surcorps différentiel logarithmique de K_{m-1} ou un surcorps différentiel exponentiel de K_{m-1}), on montre alors que f est une somme de Liouville dans K_{m-1}. En utilisant de nouveau le théorème de descente approprié, on montre que f est une somme de Liouville dans K_{m-2}. Et ainsi de suite : finalement, f est une somme de Liouville dans K, ce qu'il fallait démontrer.

VI

1. Le “si” est clair : si $f = D(g) + gD(X)/X$ alors $Xf = D(Xg)$ donc Xf est bien une somme de Liouville dans $K(X)$.

Passons à la réciproque : on suppose que Xf est une somme de Liouville dans $K(X)$, et comme dans la question III4, on écrit :

$$Xf = D(R) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j\in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$

où les Q_j sont des polynômes distincts de degré non nul, irréductibles et unitaires. Exactement comme dans la question III4, on montre qu'il ne peut y avoir qu'un seul Q_j, à savoir X. Mais alors $D(R) \in K[X]$ donc $R \in K[X]$, et R a le même degré que $D(R)$, à savoir 1 (car $D(R) = Xf - \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} - c\frac{D(X)}{X}$). On peut alors écrire $R = gX + h$, et $D(R) = D(g)X + g\frac{D(X)}{X}X + D(h)$, et en égalisant les coefficients de degré 1, on trouve $D(g) + gD(X)/X = f$, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons $K = k(T)$ muni de la dérivation ordinaire, avec $u = D(X)/X \in k[T]$, et $f = g' + gu \in k[T]$. Ecrivons $g = p/q$ où $p, q \in k[T]$, premiers entre eux et q choisi unitaire. On a alors $f = (p'q - pq' + pqu)/q^2 \in k[T]$ et *a fortiori* $p' + pu - pq'/q \in k[T]$ donc $pq'/q \in k[T]$ donc $q \mid pq'$, et comme p et q sont premiers entre eux, $q \mid q'$, ce qui implique $q \in k$ donc $g \in k[T]$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Supposons par l'absurde v algébrique sur K, et soit P son polynôme minimal (dont on rappelle qu'il est unitaire). On a alors $P(v) = 0$ donc $D(P(v)) = 0$ soit $P'(v)D(v) + P^D(v) = 0$. Comme $v \notin K$, $\deg P > 0$, et donc $\deg P' = \deg P - 1$. Mais comme P est unitaire, $\deg P^D < \deg P$ (car $D(1) = 0$). Donc $\deg(D(v)P' + P^D) < \deg P$, ce qui contredit la minimalité de P.

Dans le second cas, soit P_0 le polynôme minimal de e^u, et $P = \frac{P_0}{P_0(0)}$: on a $P(e^u) = 0$ et le coefficient constant de P est 1. Alors $0 = D(P(e^u)) = P'(e^u)D(u)e^u + P^D(e^u) = e^u(P'(e^u)D(u) + P^D(e^u)/e^u)$ donc $D(u)P' + P^D/X$ annule e^u, et est bien un polynôme (car le coefficient constant de P^D est 0). Par ailleurs, $D(u)P' + P^D/X$ est de degré inférieur à P, et on tient donc une contradiction, sauf s'il est identiquement nul. On va donc regarder à quelle condition nécessaire on a $D(u)P' + P^D/X = 0$ identiquement. Soit pour cela $P = \sum_i a_i X^i$. Alors $D(u)P' + P^D/X = \sum_i (D(u)(i+1)a_{i+1} + D(a_{i+1}))X^i = 0$. Il existe bien $n > 0$ tel que $a_n \neq 0$, et alors le coefficient de degré $n-1$ de $D(u)P' + P^D/X$ donne $D(u)na_n + D(a_n) = 0$ soit $D(nu) = D(v)/v$ avec $v = 1/a_n$, ce qui montre que nu est un logarithme d'un élément v de K. Réciproquement, si $nu = \log v$ avec $v \in K$, alors $D(v)/v = nD(u) = nD(e^u)/e^u = D((e^u)^n)/(e^u)^n$ donc $v = c(e^u)^n$ avec $c \in K_{\mathrm{cst}}$ donc $P = cX^n - v$ annule e^u et ce dernier est algébrique.

3. On procède comme d'habitude : si une fraction rationnelle admet un logarithme p/q dans $\mathbb{C}(T)$, avec p et q premiers entre eux et q unitaire, on a, en écrivant $(p/q)'$, une écriture de la forme $(p/q)' = \sum_{j\in J} \frac{q_j'}{q_j}$ où les q_j peuvent être choisis distincts et irréductibles. Mais alors on trouve $q \mid q'$ donc $q = 1$, donc on a $\mathrm{pgcd}(q_j, q) = 1$ pour tout j, donc $q_j \mid q_j'$ pour tout j, donc tous les q_j sont constants. Donc $p' = 0$ donc p est constant. Ce qu'il fallait démontrer.

Si $u \in \mathbb{C}(T)$ n'est pas constante, on montre que e^u est transcendant sur $\mathbb{C}(T)$. Par l'absurde, si e^u est algébrique, alors il existe $n > 0$ tel que nu soit un logarithme d'une fraction rationnelle. Mais dans ce cas u est constant d'après ce qui précède, ce qui est une contradiction. Ce qu'il fallait démontrer.

4. On vient de voir que e^u est transcendant sur $\mathbb{C}(T)$ et par suite on peut identifier $\mathbb{C}(T)(e^u)$ à $\mathbb{C}(T)(X)$ comme nous l'avons déjà fait. Si fe^u admet une primitive dans un surcorps différentiel élémentaire de $\mathbb{C}(T)$, alors le théorème de Liouville-Ostrowski montre qu'elle est une somme de Liouville dans $\mathbb{C}(T)(e^u)$. On peut alors appliquer les résultats de la question VI1, qui donnent exactement les résultats voulus (avec $X = e^u$ et $D(X)/X = u'$). Enfin, comme $\deg u > 0$, on a $\deg(gu') > \deg g'$ donc $\deg f = \deg(gu')$ donc $\deg f = \deg g + \deg u - 1$ donc $\deg u = 1 + \deg f - \deg g$ donc $\deg u \leq 1 + \deg f$. Ce qu'il fallait démontrer.

Quant à la réciproque, elle est triviale.

5. On applique le résultat de la question précédente avec $f = 1$ et $u = T^2$: pour que $\int e^{t^2}\,dt$ soit une fonction élémentaire, il faut avoir $\deg u \leq 1 + \deg f$, ce qui n'est assurément pas le cas !