Résolution d'un exercice

David A. Madore

26 novembre 2000

Énoncé : Soit $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et bornée. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Résolution :

On procède par l'absurde. Autrement dit, on suppose que[1]

– f est bornée sur $[0;+\infty[$.
– $f'(x) \not\to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
– $f''(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

et on cherche à en obtenir une contradiction.

Écrivons ces trois hypothèses avec des quantificateurs[2]. Elles se traduisent respectivement ainsi :

– $(\exists M > 0)(\forall u \geq 0)(|f(u)| \leq M)$
– $(\exists \varepsilon > 0)(\forall A > 0)(\exists x > A)(|f'(x)| > \varepsilon)$
– $(\forall \delta > 0)(\exists A > 0)(\forall t > A)(|f''(t)| \leq \delta)$

Tournons-nous d'abord vers les deux premières hypothèses : elles nous garantissent l'existence de M et ε (réels strictement positifs) vérifiant certaines conditions. Soient donc M et ε tels qu'ainsi donnés. La troisième hypothèse garantit une certaine propriété pour tout $\delta > 0$ ([3]) : c'est donc à nous de choisir un δ rendant utile la propriété en question. Pour l'instant, on laissera juste $\delta > 0$, quitte à le choisir plus tard en fonction de ε et M.

Étant donné ce δ, la troisième hypothèse assure l'existence de $A > 0$ tel que $|f''(t)| \leq \delta$ lorsque $t > A$. On considère donc un tel A. La deuxième hypothèse nous permet alors de dire que (pour ce A-là) il existe $x > A$ vérifiant $|f'(x)| > \varepsilon$.

On sait que « $|f'(x)| > \varepsilon$ » équivaut à « $f'(x) > \varepsilon$ ou $f'(x) < -\varepsilon$ ». Supposons d'abord le premier cas $(\star)$: $f'(x) > \varepsilon$.

[1] On prendra garde au fait que la négation de $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ **n'**est **pas** $\lim_{x\to+\infty} f'(x) \neq 0$ car cette dernière écriture présuppose l'existence de la limite.

[2] On rappelle que « $f'(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ » s'écrit « $(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)(\forall x > A)(|f'(x)| \leq \varepsilon)$ ». C'est la négation de cette assertion qui constitue notre deuxième hypothèse.

[3] On rappelle que la lettre δ se lit « delta ».

À ce stade-là on a donc ε, δ des réels strictement positifs, A un réel strictement positif tel que si $t > A$ alors $|f''(t)| \leq \delta$, et x un réel strictement supérieur à A tel que $f'(x) > \varepsilon$.

Appliquons l'inégalité des accroissements finis à f' entre x et y, où y est un réel quelconque vérifiant $y \geq x$ (et par conséquent $y > A$). Puisque $|f''(t)| \leq \delta$ pour tout $t > A$ (et notamment pour $t \geq x$), on a

$$|f'(y) - f'(x)| \leq \delta(y - x)$$

Et ceci implique[4]

$$f'(y) - f'(x) \geq -\delta(y - x)$$

Comme par ailleurs

$$f'(x) > \varepsilon$$

on en déduit

$$f'(y) > \varepsilon - \delta(y - x)$$

et ce pour tout $y \geq x$.

Cherchons maintenant à minorer $f'(y)$ par une quantité absolue, disons $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour cela il suffit d'avoir $\varepsilon - \delta(y - x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui équivaut à $-\varepsilon + \delta(y - x) \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ ou encore à $\delta(y - x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ou finalement à $y - x \leq \frac{\varepsilon}{2\delta}$, c'est-à-dire $y \leq x + \frac{\varepsilon}{2\delta}$.

On a donc montré que pour $x \leq y \leq x + \frac{\varepsilon}{2\delta}$ on a $f'(y) > \varepsilon - \delta(y - x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, donc $f'(y) > \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $K = \frac{\varepsilon}{2\delta}$: pour $y \in [x; x + K]$ on a donc $f'(y) > \frac{\varepsilon}{2}$.

Appliquons maintenant le théorème des valeurs intermédiaires à f entre x et $x + K$: il assure qu'il existe $y \in]x; x + K[$ tel que

$$\frac{f(x + K) - f(x)}{(x + K) - x} = f'(y)$$

donc

$$\frac{f(x + K) - f(x)}{K} = f'(y) > \frac{\varepsilon}{2}$$

et par conséquent

$$f(x + K) - f(x) > \frac{K\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon^2}{4\delta}$$

On se rappelle maintenant qu'on avait supposé ($\star$) que $f'(x) > \varepsilon$. Il reste le cas $f'(x) < -\varepsilon$. Celui-ci se traite de même en remplaçant f par $-f$: on trouve $f(x + K) - f(x) < -\frac{\varepsilon^2}{4\delta}$. Dans chacun des deux cas on a donc trouvé deux valeurs, $u = x$ et $v = x + K$, telles que

$$|f(v) - f(u)| > \frac{\varepsilon^2}{4\delta} \tag{1}$$

[4] Puisque $|a| \leq b$ équivaut à $-b \leq a \leq b$.

Mais par ailleurs on rappelle que f était censément uniformément bornée en valeur absolue par un certain M. Notamment $|f(u)| \leq M$ et $|f(v)| \leq M$ donnent, par inégalité triangulaire

$$|f(v) - f(u)| \leq 2M \tag{2}$$

et de (1) et (2) on déduit

$$2M < \frac{\varepsilon^2}{4\delta}$$

Or on avait toute liberté pour choisir $\delta > 0$ en fonction[5] de $\varepsilon > 0$ et $M > 0$. Notamment, on peut choisir $\delta = \frac{\varepsilon^2}{8M}$, auquel cas on a $2M = \frac{\varepsilon^2}{4\delta}$, une contradiction.

On a donc montré que les trois hypothèses faites sont contradictoires, c'est-à-dire que lorsque $f\colon [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable bornée telle que $f''(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$ alors on a nécessairement aussi $f'(x) \to 0$ pour $x \to +\infty$. Ce qu'il fallait démontrer.

Rédaction soignée[6] :

Soit $f\colon [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, bornée — disons bornée par une quantité $M > 0$ en valeur absolue. On suppose que $f''(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. On veut montrer que $f'(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Pour cela on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(x)| > \varepsilon$ pour des x arbitrairement grands[7]. Mais par ailleurs, puisque $f''(x) \to 0$, on sait que $|f''(t)| \leq \frac{\varepsilon^2}{8M}$ lorsque t est assez grand. Pour y entre x et $x + \frac{4M}{\varepsilon}$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f' donne alors $|f'(y) - f'(x)| \leq \frac{\varepsilon^2}{8M} \times \frac{4M}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$, donc $|f'(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$ par inégalité triangulaire. Le théorème des accroissements finis, cette fois appliqué à f entre x et $x + \frac{4M}{\varepsilon}$ donne[8] $|f(v) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{4M}{\varepsilon} = 2M$ où $v = x + \frac{4M}{\varepsilon}$ (car $f(v) - f(x) = (v-x)f'(y)$ pour un certain y). Ceci contredit (par inégalité triangulaire) l'hypothèse que $f(x)$ est bornée par M en valeur absolue.

Remarques :

1. La fonction f elle-même ne tend pas forcément vers 0 comme le montre l'exemple de $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ (qui est bien bornée et dont la dérivée seconde tend bien vers 0 comme on le voit par un calcul facile).
2. On peut en déduire que, si f est une fonction deux fois dérivable bornée telle que $f''(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, alors $F''(x) \to 0$ aussi, où F désigne la fonction définie par $F(x) = \frac{1}{2}f(x)^2$. En effet $F''(x) = f'(x)^2 + f(x)\,f''(x)$, le premier terme tend vers 0 d'après ce que nous venons de démontrer, et le second aussi puisqu'il est le produit d'une quantité bornée par une quantité qui tend vers 0.

[5] J'écris « en fonction » car il va de soi qu'on ne pourrait pas, par exemple, choisir pour δ une expression faisant intervenir A (ou, encore moins, δ lui-même !), puisque A dépend de δ. Une variable doit être choisie en termes des variables apparues avant elle dans le raisonnement — c'est-à-dire des variables qui n'en dépendent pas.

[6] La résolution précédente, excessivement longue, avait pour but de faire comprendre les mécanismes du raisonnement. La rédaction qui suit, de la même démonstration, montre sous quelle forme le résultat pourrait figurer, par exemple, dans un livre.

[7] « Pour des x arbitrairement grands » est une façon commode de traduire la quantification $(\forall A > 0)(\exists x > A)$.

[8] Il faut admettre qu'on est ici à la limite de la concision admissible. N'importe quel mathématicien normalement constitué tique au niveau de cette phrase, avant de se convaincre qu'elle est correcte.

Explications intuitives :

Sans doute cet exercice n'est-il pas facile à aborder. On peut avoir du mal à voir, dans la démonstration proposée, quelle est le sens de la démarche suivie.

Il faut comprendre le raisonnement de la façon suivante. Si $f'(x)$ ne tend pas vers 0, c'est qu'il s'écarte, pour des x arbitrairement grands, par une certaine valeur $\varepsilon > 0$, de 0. Mais comme $f''(x)$ tend vers 0, et que f'' représente la vitesse à laquelle f' varie, l'inégalité des accroissements finis assure que, dès que f' dépasse cette valeur ε, il va prendre un « certain temps » à redescendre au-dessous de — disons — $\frac{\varepsilon}{2}$: ce « certain temps » est quantifiable ($K = \frac{\varepsilon}{2\delta}$), et on peut le rendre aussi grand qu'on veut (en allant chercher des endroits où f'' est vraiment très petit, de sorte que f' met vraiment beaucoup de temps pour repasser en-dessous de $\frac{\varepsilon}{2}$. Finalement, on a :

« Il existe des intervalles de longueur (K) arbitrairement grande sur lesquels f' reste plus grand qu'une certaine quantité absolue[9] (à savoir $\frac{\varepsilon}{2}$). »

Il suffit alors d'observer que le théorème des accroissements finis garantit que f varie beaucoup sur un tel intervalle, le « beaucoup » signifiant même « autant qu'on veut ». Or une fonction bornée ne peut pas varier autant qu'on veut.

Questions intermédiaires :

Voici comment des questions intermédiaires auraient pu amener à la résolution de cet exercice, par exemple dans un examen.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soit $g\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable, et ε, δ des réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que $|g'(t)| \leq \delta$ pour tout $t > A$. On suppose de plus que $|g(x)| > \varepsilon$, où x est un certain réel tel que $x > A$. Montrer que $|g(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $x \leq y \leq x + \frac{\varepsilon}{2\delta}$.

2. Soit $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe un intervalle $[x; x+K]$ tel que $|f'(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $x \leq y \leq x + K$. Minorer la quantité $|f(x+K) - f(x)|$.

3. Soit $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ et soit $M > 0$ tel que $|f(u)| \leq M$ pour tout u. Majorer la quantité $|f(x+K) - f(x)|$, où K est un réel positif quelconque.

4. Soit $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose que

- Pour tout $\delta > 0$ il existe $A > 0$ tel que $|f''(t)| \leq \delta$ si $t > A$.
- Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $A > 0$ on peut trouver $x > A$ vérifiant $|f'(x)| > \varepsilon$.
- Il existe $M > 0$ tel qu'on ait $|f(u)| \leq M$ pour tout u.

En utilisant les questions 1, 2 et 3, et en choisissant judicieusement la valeur de δ, en déduire une contradiction.

5. Soit $f\colon [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose que f est bornée et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

[9]Le mot « absolu » signifie dans ce contexte que la quantité concernée ne dépend pas des variables dont elle pourrait dépendre — en l'occurrence la longeur de l'intervalle.