Corrigé exercice 7 de la liste 3

David A. Madore

9 octobre 2000

Numéro 1

On cherche à déterminer

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n} \; ; \; 2 + \frac{1}{n} \right[$$

Il s'agit d'une intersection d'intervalles décroissants (c'est-à-dire que chacun contient les suivants). La suite $(-\frac{1}{n})$ tend vers 0, et la suite $(2 + \frac{1}{n})$ tend vers 2 : on s'attend donc à trouver un intervalle de bornes 0 et 2 (encore faudra-t-il le vérifier).

Cherchons si 0 et 2 eux-mêmes appartiennent à l'intersection. Pour ce qui est de 0, on voit qu'il appartient à tous les intervalles $\left[-\frac{1}{n} \; ; \; 2 + \frac{1}{n}\right[$ (puisque $-\frac{1}{n} \leq 0 < 2+\frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$). Par conséquent, il appartient à l'intersection (appartenir à une intersection, c'est exactement la même chose qu'appartenir à tous les ensembles dont on a pris l'intersection). De même, 2 appartient à tous les intervalles $\left[-\frac{1}{n} \; ; \; 2 + \frac{1}{n}\right[$ (puisque $-\frac{1}{n} \leq 2 < 2 + \frac{1}{n}$), donc 2 appartient à l'intersection.

On s'attend donc à trouver pour intersection l'intervalle $[0; 2]$. Maintenant nous le démontrons rigoureusement.

On a d'abord $[0; 2] \subseteq I_1$. En effet, si $x \in [0; 2]$, c'est-à-dire si $0 \leq x \leq 2$, alors on a certainement

$$-\frac{1}{n} \leq 0 \leq x \leq 2 < 2 + \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui montre $x \in \left[-\frac{1}{n} \; ; \; 2 + \frac{1}{n}\right[$, et donc (ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$) que $x \in I_1$.

Réciproquement, montrons $I_1 \subseteq [0; 2]$. Prenons donc $x \in I_1$, c'est-à-dire que $x \in \left[-\frac{1}{n} \; ; \; 2 + \frac{1}{n}\right[$ pour tout $n \geq 1$. On a alors d'une part $x \geq -\frac{1}{n}$ pour tout n, et d'autre part $x < 2 + \frac{1}{n}$ pour tout n. La première de ces inégalités montre que $x \geq 0$, car si au contraire on avait $x < 0$, alors en prenant pour n un naturel plus grand que $-\frac{1}{x}$, on verrait que $n > -\frac{1}{x}$ donc $\frac{1}{n} < -x$, donc $x < -\frac{1}{n}$, ce qui contredit notre inégalité. La seconde montre que $x \leq 2$, car si au contraire on avait $x > 2$ alors en prenant pour n un naturel plus grand que $\frac{1}{x-2}$, on verrait que $n > \frac{1}{x-2}$ donc $\frac{1}{n} < x - 2$, donc $x > 2 + \frac{1}{n}$, ce qui contredit notre inégalité. Finalement, on a montré $x \geq 0$ et $x \leq 2$, autrement dit $x \in [0; 2]$, ce qu'on voulait.

On a donc montré $[0;2] \subseteq I_1$ d'une part et $I_1 \subseteq [0;2]$ d'autre part. Ceci montre finalement que

$$I_1 = [0;2]$$

Remarque sur la rédaction : Il n'est évidemment pas nécessaire d'être aussi verbeux. Il peut être suffisant, par exemple, de justifier le résultat de la sorte : « Chacun des intervalles $\left[-\frac{1}{n}\ ;\ 2+\frac{1}{n}\right[$ contient $[0;2]$, et d'autre part aucun point en-dehors de $[0;2]$ n'est contenu dans tous ces intervalles car $-\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $2+\frac{1}{n}$ tend vers 2. C'est donc que l'intersection est $[0;2]$. » Si on veut une démonstration rigoureuse, les quatre derniers paragraphes donnés ci-dessus conviennent parfaitement (et il est inutile de justifier par quel raisonnement on est arrivé à $[0;2]$). Dans tous les cas, l'essentiel est de ne pas se tromper et de bien inclure les deux bornes dans l'intersection.

Remarque 2 : L'intersection d'une famille d'intervalles (quelconques, décroissante ou pas) est toujours un intervalle (éventuellement vide ou réduit à un point). Il n'en va pas de même d'une union (penser à l'union de deux intervalles fermés disjoints).

Numéro 2

On cherche à déterminer

$$I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]0\ ;\ \frac{1}{n}\right[$$

Il s'agit d'une intersection d'intervalles décroissants. La suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0, et la suite constante (0) tend aussi vers 0 : on s'attend donc à trouver soit $\{0\}$ soit l'ensemble vide.

Mais 0 n'appartient pas à I_2 puisqu'il n'appartient (déjà) pas à $]0;1[$ (le premier intervalle dont on fait ici l'intersection) ; or pour appartenir à une intersection, il faut appartenir à *tous* les ensembles dont il est pris l'intersection.

On s'attend donc à trouver pour intersection l'ensemble vide. Maintenant nous le démontrons rigoureusement.

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre réel x dans I_2. On aurait alors $x \in \left]0\ ;\ \frac{1}{n}\right[$ pour tout $n \geq 1$. Autrement dit $x > 0$ et en même temps $x < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Mais ceci est absurde : en effet, soit n un naturel supérieur à $\frac{1}{x}$, de sorte que $n \geq \frac{1}{x}$ et donc $x \geq \frac{1}{n}$: on a une contradiction. C'est donc que I_2 est vide :

$$I_2 = \varnothing$$

Remarque « philosophique » : Il peut être surprenant de trouver une intersection vide alors que les intersections finies contenaient toujours quelque chose. Certains s'attendent intuitivement à ce qu'il subsiste des quantités « vraiment très petites ». Ces considérations ont conduit certains mathématiciens et philosophes à introduire des nombres dits « infinitésimaux » qui sont à la fois strictement supérieurs à 0 et strictement inférieurs à $\frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Il existe des théories parfaitement sensées faisant intervenir de tels nombres. Attention : *ils ne font pas partie des mathématiques orthodoxes*, et on ne les admettra donc pas ici. Mais Newton ou Leibniz, inventant le calcul infinitésimal, pensaient assurément en termes de « quantités évanescentes ». (Des petits malins, croyant les imiter, polluent maintenant les *newsgroups* scientifiques avec des questions comme « est-ce que $0,000\dots01$ est le plus petit nombre réel strictement positif ? » et autres absurdités.)

Remarque 2 : Ici, on a une intersection décroissante d'intervalles ouverts non vides, qui est vide. Ceci ne peut pas se produire pour des intervalles fermés bornés : *l'intersection d'une suite décroissante (emboîtée) d'intervalles fermés bornés* *non vides n'est jamais vide*. Ce résultat (parfois connu sos le nom de *théorème des segments emboîtés*, encore que ce nom soit généralement réservé à une forme plus précise de l'énoncé) fait partie des propriétés générales de « compacité » fort importantes en Topologie.

Remarque historique : Dans cette démonstration, comme dans la précédente et les suivantes, on a utilisé le fait que *pour tout nombre réel on peut trouver un entier naturel qui soit plus grand*. Ce résultat, qui s'exprime en disant que « $\mathbb{R}$ est archimédéen », équivaut encore à dire que la suite (n) tend vers $+\infty$. S'il porte le nom d'Archimède, c'est qu'on le trouve souvent utilisé par le grand mathématicien de Syracuse ; en fait, les Grecs l'utilisaient sous la forme de la « méthode d'épuisement » (voir notamment la Proposition 2 du livre XII des *Éléments* d'Euclide de Géla), et Archimède attribue cette technique à Eudoxe de Cnide.

Numéro 3

On cherche à déterminer

$$I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [n\ ;\ +\infty[$$

Il s'agit d'une intersection d'intervalles décroissants. La suite (n) tend vers $+\infty$: on s'attend donc à trouver l'ensemble vide (rappelons que $+\infty$ n'est pas un nombre réel et qu'il n'y a **aucun sens** à trouver $\{+\infty\}$ ou étudier la suite constante égale à $+\infty$ ou quelque chose de la sorte).

On s'attend donc à trouver pour intersection l'ensemble vide. Maintenant nous le démontrons rigoureusement.

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre réel x dans I_3. On aurait alors $x \in [n; +\infty[$ pour tout $n \geq 1$. Autrement dit $x \geq n$ pour tout $n \geq 1$. Mais ceci est absurde : en effet, on peut bien trouver un naturel n supérieur à x, de sorte que $x < n$. C'est donc que I_3 est vide :

$$I_3 = \varnothing$$

Remarque sur la rédaction : La façon la plus simple de rédiger ici est simplement de dire « aucun réel ne peut être supérieur ou égal à tous les naturels $n \geq 1$ à la fois ; c'est donc que I_3 est vide ».

Numéro 3

On cherche à déterminer

$$I_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}\ ;\ +\infty\right[$$

Il s'agit d'une réunion d'intervalles croissants (c'est-à-dire que chacun est inclus dans tous les suivants). La suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 : on s'attend donc à trouver une demi-droite d'extrémité 0.

Cherchons si 0 lui-même appartient à l'union. Appartenir à une réunion signifie précisément appartenir à l'un des ensembles mis en jeu dans l'union. Or on voit que 0 n'appartient à aucun des ensembles $\left[\frac{1}{n}\ ;\ +\infty\right[$. Donc il n'appartient pas à I_4.

On s'attend donc à trouver pour union la demi-droite $]0; +\infty[$. Maintenant nous le démontrons rigoureusement.

On a d'abord $I_4 \subseteq]0; +\infty[$. En effet, si $x \in I_4$ alors $x \in \left[\frac{1}{n}\ ;\ +\infty\right[$ pour un certain $n \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{n} > 0$, donc on a bien $x > 0$, soit $x \in]0; +\infty[$.

Réciproquement, montrons $]0; +\infty[\subseteq I_4$. Pour cela, soit $x \in]0; +\infty[$, autrement dit $x > 0$. Soit n un naturel supérieur à $\frac{1}{x}$ de sorte que $n \geq \frac{1}{x}$, et alors $x \geq \frac{1}{n}$, ce qui montre $x \in \left[\frac{1}{n}\ ;\ +\infty\right[$, donc $x \in I_4$.

On a donc montré que $I_4 \subseteq]0; +\infty[$ et $]0; +\infty[\subseteq I_4$. C'est donc que

$$I_4 =]0; +\infty[$$

Remarque : Une façon « sophistiquée » de procéder consisterait à faire comme suit. Tout se place dans $E = \mathbb{R}_+^*$. Dans cet ensemble, $\left[\frac{1}{n}\ ;\ +\infty\right[$ est le complémentaire de $\left]0\ ;\ \frac{1}{n}\right[$. Donc l'union des $\left[\frac{1}{n}\ ;\ +\infty\right[$ est le complémentaire de l'intersection des $\left]0\ ;\ \frac{1}{n}\right[$ (l'union des complémentaires est le complémentaire de l'intersection, ce qui marche même pour des unions et intersections infinies). Mais cette intersection a été calculée : c'est I_2 et elle est vide. Donc l'union I_4 recherchée est le complémentaire du vide dans $E = \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ tout entier.