Approximation faible aux places de bonne réduction sur les surfaces cubiques sur les corps de fonctions

David A. Madore

15 avril 2005

Abstract

We prove that a smooth cubic surface over the field of functions of a curve on an algebraically closed field of characteristic 0 satisfies weak approximation at places of good reduction. The method used imitates that employed by Swinnerton-Dyer ([10]) in the case of number fields.

Résumé

On démontre que les surfaces cubiques lisses sur les corps de fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 vérifient l'approximation faible aux places de bonne réduction. La méthode utilisée imite celle employée par Swinnerton-Dyer ([10]) dans le cas des corps de nombres.

MSC (2000) : 14J26, 14G05, 14H05, 11D25

Introduction

Si X est une variété lisse et géométriquement connexe sur le corps de fonctions $K = k(\Gamma)$ d'une courbe sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0, et S un ensemble fini de places de K (identifiées à des points de Γ, supposée propre et lisse), on dit que X vérifie l'approximation faible aux places de S lorsque l'image de la flèche diagonale naturelle $X(K) \to \prod_{v\in S} X(\hat{K}_v)$ est dense, où $\hat{K}_v$ est le complété de K en la place v et $X(\hat{K}_v)$ est muni de la topologie v-adique ; si ce résultat vaut pour tout ensemble S fini de places de K, on dira tout simplement que X vérifie l'approximation faible. On renvoie à [1] pour une discussion générale de l'approximation faible sur les corps de fonctions d'une courbe.

Il est tentant de conjecturer que l'approximation faible vaut pour toute variété projective lisse et géométriquement rationnellement connexe sur K (voir [5] pour une définition du terme « rationnellement connexe » ; rappelons que les surfaces géométriquement rationnellement connexes sont les surfaces géométriquement rationnelles). Le meilleur résultat connu[1] dans cette direction est dû à Kollár, Miyaoka et Mori (cf. [5], IV.6.10), mais il ne donne qu'une version affaiblie de l'approximation (essentiellement la surjectivité sur la fibre spéciale, c'est-à-dire l'approximation à l'ordre zéro) et seulement aux places de bonne réduction. Il est également à mettre en perspective avec un résultat plus récent de Graber, Harris et Starr ([2]), assurant que X a toujours un K-point. Par ailleurs, on peut également remarquer que l'approximation faible vaut lorsque X est constante, c'est-à-dire provient d'une variété rationnellement connexe définie sur k (cf. [6] (4.1.2.4)).

En des termes plus géométriques, la question revient à s'intéresser à un morphisme propre $p\colon \mathscr{X} \to \Gamma$, dont la fibre générale est lisse et rationnellement connexe : le théorème de Graber, Harris et Starr assure que p a automatiquement une section, et celui de Kollár, Miyaoka et Mori permet alors de trouver, étant donnés un nombre fini de points dans des « bonnes » fibres (lisses et rationnellement connexes), une section passant par ces points. L'approximation faible demande à pouvoir prescrire en outre le comportement infinitésimal de la section aux points considérés.

Parmi les cas où l'on sait que l'approximation faible vaut (y compris aux places de mauvaise réduction ; cf. [1] pour une démonstration de ces différents résultats), on peut citer les surfaces lisses fibrées en coniques sur une conique, ou encore les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^4$, c'est-à-dire les surfaces de Del Pezzo de degré 4. (Rappelons, cf. [5] III.2.1, que toute surface projective lisse, géométriquement connexe et géométriquement rationnelle est birationnelle soit à une surface fibrée en coniques sur une co-

[1]Depuis, Hassett et Tschinkel ont obtenu le résultat général de l'approximation faible aux places de bonne réduction pour toutes les variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes.

nique soit à une surface de Del Pezzo de degré $1 \leq d \leq 9$.) Le cas des surfaces de Del Pezzo de degré $d \geq 5$ étant trivial (car elles sont K-rationnelles dès qu'elles ont un K-point, cf. [5] III.3), le cas $d = 3$, c'est-à-dire des surfaces cubiques, apparaît comme le premier cas intéressant.

La question de savoir si l'approximation faible vaut pour une surface cubique lisse sur K, au moins aux places de bonne réduction, a été posée par J. Kollár dans son exposé au congrès européen à Budapest en juillet 1996. Le but de cet article est de répondre positivement à cette question, en prouvant le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et K le corps de fonctions d'une courbe Γ sur k. Soit X une surface cubique lisse sur K et $S \subset \Gamma$ un ensemble fini de places de bonne réduction (en une surface cubique lisse) de X. Alors, en notant $\hat{K}_v$ le complété de K en un $v \in S$, l'image de la flèche naturelle $X(K) \hookrightarrow \prod_{v \in S} X(\hat{K}_v)$ est dense (où l'image est munie du produit des topologies v-adiques).*

Dans une première partie, on démontre le résultat dans le cas où l'ensemble S est réduit à une seule place v avec l'amélioration consistant à prouver la densité v-adique de n'importe quelle classe de R-équivalence (proposition 7) ; pour cela, on commence par obtenir un résultat de surjectivité sur la fibre spéciale (proposition 4) avant d'améliorer l'approximation à n'importe quel ordre. Dans une deuxième partie, on montre comment ce résultat en une seule place permet d'obtenir l'approximation faible en n'importe quel ensemble fini de places de bonne réduction.

Les arguments utilisés ici (et notamment celui de la deuxième partie) sont inspirés de ceux employés précédemment par Swinnerton-Dyer dans [10] pour prouver un résultat comparable dans le cas, techniquement plus difficile, des surfaces cubiques sur les corps de nombres.

On renvoie à [9] pour les propriétés générales des surfaces cubiques.

1 Approximation en une seule place de bonne réduction

Notations et hypothèses pour la section : Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, Γ une courbe intègre sur k, qu'on peut toujours supposer propre et lisse, et $K = k(\Gamma)$ son corps des fonctions. Soit

$v \in \Gamma$ une place de K, identifiée à la valuation normalisée correspondante sur K. Soit $A = \{f \in K : v(f) \geq 0\}$ l'anneau des entiers correspondant, anneau de valuation discrète dont on note $\mathfrak{m} = \{f \in K : v(f) \geq 1\}$ l'idéal maximal et π une uniformisante ($\mathfrak{m} = \pi A$) ; le corps résiduel $A/\pi A$ est canoniquement isomorphe à k. Soit $\hat{A}$ le complété de A pour sa valuation v, et $\hat{K} = \mathrm{Frac}(\hat{A})$ le corps des fractions de $\hat{A}$.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3_A$ une surface cubique sur A dont on note $X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\,A} \mathrm{Spec}\,k$ la fibre spéciale. On suppose que X est lisse.

On dispose sur $\mathbb{P}^3(\hat{K}) = \mathbb{P}^3(\hat{A})$ de la topologique v-adique, pour laquelle un système fondamental de voisinages de $(T_0 : T_1 : T_2)$ est formé par les ensembles des $(T_0' : T_1' : T_2')$ vérifiant $v(T_i' - T_i) \geq m$ (pour $i = 0, 1, 2$) avec $m \in \mathbb{N}$. Cette topologie détermine une topologie v-adique sur $X(\hat{K}) = \mathcal{X}(\hat{A})$.

On se propose d'étudier la question de savoir si l'image de la flèche naturelle $X(K) \hookrightarrow X(\hat{K})$ est dense. On aura également besoin de considérer la flèche naturelle, de spécialisation, $X(\hat{K}) \to Y(k)$ (déduite de celle de $\mathbb{P}^3(\hat{K}) \to \mathbb{P}^3(k)$).

Nous supposons Y lisse (i.e. v est une place de bonne réduction).

Définitions générales : Lorsque $P \in X(K)$ est un K-point de X, de spécialisation $\tilde{P} \in Y(k)$, on appellera $\mathcal{C}(P)$ l'intersection de $\mathcal{X}$ avec son plan tangent en P (vu comme point de $\mathcal{X}(A)$), dont la fibre générale (intersection de X avec son plan tangent en P) sera notée $C(P)$ et la fibre spéciale $\tilde{C}(\tilde{P})$ (intersection de Y avec son plan tangent en $\tilde{P}$). Lorsque P (resp. $\tilde{P}$) n'est situé sur aucune droite de X (resp. Y), la courbe cubique $C(P)$ (resp. $\tilde{C}(\tilde{P})$) est irréductible et a P (resp. $\tilde{P}$) comme seul point singulier, qui est soit un point double ordinaire soit un point de rebroussement ; dans le cas contraire, $C(P)$ (resp. $\tilde{C}(\tilde{P})$) est, réductible, formée soit de la réunion de trois droites (éventuellement concourantes en P (resp. $\tilde{P}$), qu'on appelle alors un « point d'Eckardt ») soit de la réunion d'une droite et d'une conique lisse.

Toujours considérant $P \in X(K)$, on peut identifier sans perte de généralité à $\mathbb{P}^2_A$ le plan tangent à $\mathcal{X}$ en P, dont on notera $(T_0 : T_1 : T_2)$ les coordonnées homogènes, et on peut supposer que P a (sur A) les coordonnées $(1 : 0 : 0)$. L'équation de $\mathcal{C}(P)$ s'écrit alors $T_0\, q(T_1, T_2) + c(T_1, T_2) = 0$, où $q \in A[T_1, T_2]$ est une forme quadratique et $c \in A[T_1, T_2]$ une forme cubique, dont on note $\tilde{q} \in k[T_1, T_2]$ et $\tilde{c} \in k[T_1, T_2]$ les réductions respectives. L'hypothèse selon laquelle P (resp. $\tilde{P}$) n'est pas situé sur une droite de X (resp. Y) se traduit en le fait que q et c (resp. $\tilde{q}$ et $\tilde{c}$) sont non nulles et sans zéro commun.

On définit une application rationnelle explicite de $\mathbb{P}^1_A$ vers $\mathcal{C}(P)$, qui dans certaines conditions favorables (que nous précisons ci-dessous) est un paramétrage, de la façon suivante :

$$\begin{array}{rl} F_P\colon & \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{C}(P) \subset \mathbb{P}^2_A \\ & (\lambda : \mu) \mapsto (-c(\lambda,\mu) : \lambda q(\lambda,\mu) : \mu q(\lambda,\mu)) \end{array}$$

Lorsque P n'est pas situé sur une droite de X (droite géométrique, c'est-à-dire définie sur la clôture algébrique de K), ce qui assure que $\mathcal{C}(P)$ est géométriquement irréductible, on a une flèche rationnelle dans l'autre direction :

$$\begin{array}{rl} G_P\colon & \mathbb{P}^2_A \supset \mathcal{C}(P) \dashrightarrow \mathbb{P}^1_A \\ & (T_0 : T_1 : T_2) \mapsto (T_1 : T_2) \end{array}$$

Pour éviter toute ambiguïté, on notera f_P et g_P (resp. $\tilde{f}_P$ et $\tilde{g}_P$) les restrictions de F_P et G_P à la fibre générique (resp. à la fibre spéciale).

On se permettra par ailleurs d'utiliser encore les notations ci-dessus lorsque P sera un point défini sur une extension finie K' de K ou sur $\hat{K}$: il faudra alors bien entendu comprendre que les objets définis le seront sur K' ou $\hat{K}$, sur la fermeture intégrale A' de A dans K' ou la complétion $\hat{A}$, ou sur k.

On appellera $X_{\mathrm{bon}} \subseteq X$ l'ouvert de Zariski de X formé du complémentaire des droites tracées (au sens géométrique) sur X et des points P de X pour lesquels $C(P)$ a en P un point de rebroussement : autrement dit, pour $P \in X_{\mathrm{bon}}(\bar{K})$, la courbe $C(P)$ est une cubique ayant un seul point singulier, P, qui est un point double ordinaire. On appellera Y_{bon} l'ouvert correspondant pour la fibre spéciale : Y_{bon} est l'ouvert de Y dont les points $\tilde{P} \in Y_{\mathrm{bon}}(k)$ sont ceux pour lesquels $\tilde{C}(\tilde{P})$ est une cubique ayant un seul point singulier $\tilde{P}$, qui est un point double ordinaire. Un point $P \in X$ dont la spécialisation $\tilde{P}$ est dans Y_{bon} est lui-même dans X_{bon} (en fait, $X_{\mathrm{bon}} \cup Y_{\mathrm{bon}}$ est ouvert dans $\mathcal{X}$).

Il nous faut remarquer que X_{bon} n'est pas vide (au sens géométrique) : cela peut se justifier, par exemple, en prenant un pinceau de Lefschetz de sections de X (cf. [4], théorème 2.5). Ce raisonnement (géométrique) montre aussi bien que Y_{bon} n'est pas vide, naturellement.

Le corps $K = k(\Gamma)$ est un corps C_1 au sens de Lang, ce qui implique notamment qu'il existe un point K-rationnel sur X : on peut donc choisir $P \in X(K)$. Notre but ultime est de construire un P arbitrairement proche d'un $P^* \in X(\hat{K})$ donné (et même, vérifiant certaines conditions techniques supplémentaires qui seront explicitées plus loin), mais dans un premier temps, cherchons à montrer qu'il existe des $P \in X(K)$ se spécialisant en n'importe quel $\tilde{P} \in Y(k)$ donné.

On sait au moins que les points K-rationnels de X sont denses au sens de Zariski, car une surface cubique est K-unirationnelle dès qu'elle possède un point K-rationnel ([7] ; ici, on peut aussi appliquer [9] II.12.11 et IV.30.1). À présent, prouvons le lemme suivant, qui permet de remplacer un point $P \in X_{\text{bon}}(K)$ par un point dont la spécialisation est moins insalubre :

Lemme 2. *Soit U un ouvert de Zariski non vide de X. Soit $P \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$. Alors pour tout point $\tilde{Q}$* lisse *sur $\tilde{C}(\tilde{P})$, il existe un $Q \in (C(P) \cap U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{Q}$.*

Démonstration. Soit donc $P \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$. Alors l'application $f_P : \mathbb{P}^1_K \to C(P)$, définie plus haut, est un paramétrage rationnel de $C(P)$. Soit $\tilde{Q}$ un point lisse sur $\tilde{C}(\tilde{P})$ (ce qui implique notamment que $\tilde{Q}$ est différent de $\tilde{P}$) ; et soit $Q^* \in (C(P) \cap U \cap X_{\text{bon}})(\hat{K})$ un point qui se spécialise en $\tilde{Q}$: un tel point existe d'après le lemme de Hensel (il n'est pas difficile de s'assurer qu'on peut le choisir dans $U \cap X_{\text{bon}}$ puisqu'il ne faut pour cela éviter qu'un nombre fini de points sur $C(P)$). On pose alors $\delta^* = g_P(Q^*) \in \mathbb{P}^1(\hat{K})$ (notons que $g_P(Q^*)$ est bien défini car Q^* est différent de P puisque déjà sa spécialisation $\tilde{Q}$ diffère de $\tilde{P}$). On peut choisir une suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{P}^1(K)$ tels que $\delta_i \to \delta^*$ (au sens de la topologie v-adique). Puisque $f_P(\delta^*) = Q^*$ (ce qui vaut car P n'est pas situé sur une droite de X), on voit qu'en posant $Q_i = f_P(\delta_i)$ (ce qui a certainement un sens pour i assez grand) on a $Q_i \to Q^*$ au sens v-adique. On peut en conclure que, pour i assez grand, la spécialisation $\tilde{Q}_i$ de Q_i coïncide avec la spécialisation $\tilde{Q}$ de Q^*, et que Q_i est dans l'ouvert de Zariski $U \cap X_{\text{bon}}$. Posant alors $Q = Q_i$, on a trouvé un point $Q \in (C(P) \cap U \cap X_{\text{bon}})(K)$ comme souhaité : sa spécialisation est $\tilde{Q}$. ☐

Lemme 3. *Soit U un ouvert de Zariski non vide de X. Soit $P \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$. Alors pour tout point $\tilde{Q}$ de $\tilde{C}(\tilde{P})$ (non nécessairement lisse), il existe un $Q \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{Q}$.*

Démonstration. Si $\tilde{Q}$ est lisse sur $\tilde{C}(\tilde{P})$, le résultat est déjà démontré ci-dessus (lemme 2), et si $\tilde{Q} = \tilde{P}$, il est trivial. Il s'agit donc de considérer le cas où $\tilde{Q}$ et $\tilde{P}$ sont deux points singuliers distincts de $\tilde{C}(\tilde{P})$. Mais dans ce cas, la droite qui les joint est nécessairement contenue dans $\tilde{C}(\tilde{P})$ donc dans Y. Soit $\tilde{R}$ un point lisse de $\tilde{C}(\tilde{P})$ situé sur cette droite : alors elle (la droite) est contenue dans $\tilde{C}(\tilde{R})$, donc notamment $\tilde{Q}$ est dans $\tilde{C}(\tilde{R})$, et par ailleurs il y est lisse (car le plan tangent à Y en $\tilde{P}$ est le plan tangent à Y en $\tilde{Q}$, et ce n'est *pas* le plan tangent à Y en $\tilde{R}$ puisque $\tilde{R}$ est lisse sur $\tilde{C}(\tilde{P})$). Deux applications successives du lemme 2 montrent d'abord qu'il existe $R \in (C(P) \cap U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{R}$, puis $Q \in (C(R) \cap U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{Q}$. □

Proposition 4. *Soit U un ouvert de Zariski non vide de X. Alors pour tout $\tilde{P} \in Y(k)$, il existe $P \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$ qui se spécialise en $\tilde{P}$.*

Démonstration. Soit $R \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$: un tel point existe car, comme nous l'avons signalé plus haut, $X(K)$ est dense au sens de Zariski sur X. On considère la courbe $\tilde{C}(\tilde{R})$ sur Y, d'une part, et de l'autre la courbe[2] $\tilde{D}(\tilde{P})$ formée des points $\tilde{M} \in Y(k)$ tels que $\tilde{P} \in \tilde{C}(\tilde{M})$: ces deux courbes se rencontrent en au moins un point $\tilde{Q}$ (vu que $\tilde{C}(\tilde{M})$ est une section plane). Il vérifie donc $\tilde{Q} \in \tilde{C}(\tilde{R})$ et $\tilde{P} \in \tilde{C}(\tilde{Q})$. Deux applications successives du lemme 3 montrent d'abord l'existence d'un $Q \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$ tel que Q se spécialise en $\tilde{Q}$ puis d'un $P \in (U \cap X_{\text{bon}})(K)$ tel que P se spécialise en $\tilde{P}$. □

Cette proposition est un cas particulier du résultat général dû à Kollár, Miyaoka et Mori (cf. [5], IV.6.10) mentionné dans l'introduction, mais ici démontré dans ce cas par des méthodes très différentes, particulières au cas des surfaces cubiques et beaucoup plus simples.

Nous décrivons maintenant une construction essentielle. Considérons dans un premier temps un point $M \in X_{\text{bon}}(K)$ tel que $\tilde{M} \in Y_{\text{bon}}(k)$ (l'existence d'un tel M est garantie par la proposition 4). On a introduit précédemment une application rationnelle $F_M \colon \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{C}(M)$ définie par

$$\begin{aligned} F_M\colon \quad & \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{C}(M) \subset \mathbb{P}^2_A \\ & (\lambda : \mu) \mapsto (-c(\lambda,\mu) : \lambda q(\lambda,\mu) : \mu q(\lambda,\mu)) \end{aligned}$$

Dire que $\tilde{q}$ et $\tilde{c}$ n'ont pas de zéro projectif commun signifie précisément que l'application rationnelle F_M est un morphisme. C'est le cas ici puisque $\tilde{M}$ est dans Y_{bon} donc n'est situé sur aucune droite de Y. On a donc non seulement une application rationnelle mais même un morphisme $F_M \colon \mathbb{P}^1_A \to \mathcal{C}(M)$.

[2] C'est bien une courbe car il n'est pas possible que tous les plans tangents à Y passent par un même point, sans quoi Y serait un cône ayant ce point pour sommet (cf. par exemple [8], lemme 5).

On appellera τ_1 et τ_2 deux points de $\mathbb{P}^1_K(K)$ tels que $\tilde{f}_M(\tilde{\tau}_1) = \tilde{f}_M(\tilde{\tau}_2) = \tilde{M}$ avec $\tilde{\tau}_1 \neq \tilde{\tau}_2$ et que $f_M(\tau_1)$ et $f_M(\tau_2)$ (que nous appellerons respectivement M_1 et M_2) soient tous deux distincts de M (ils sont alors automatiquement distincts l'un de l'autre). Autrement dit, M_1 et M_2 sont deux points K-rationnels sur $C(M)$, proches de M, sur l'une et l'autre branche sur $\hat{K}$ de cette cubique qui a en M un point double ordinaire.

On introduit maintenant l'application rationnelle de composition habituelle sur les surfaces cubiques : $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}, (N_1, N_2) \mapsto N_1 \bullet N_2$ envoie deux points N_1 et N_2 de $\mathcal{X}$ en position générale sur le troisième point $N_1 \bullet N_2$ d'intersection de la droite $(N_1N_2) \subset \mathbb{P}^3$ avec $\mathcal{X}$. On sait que $N_1 \bullet N_2$ est définie (au sens d'application des deux variables, sur tout $\operatorname{Spec} A$) au moins lorsque N_1 et N_2 ont des spécialisations $\tilde{N}_1$ et $\tilde{N}_2$ distinctes et que la droite qui les relie n'est pas contenue dans Y ou, ce qui revient au même, lorsque $\tilde{N}_2$ n'est pas situé sur $\tilde{C}(\tilde{N}_1)$ ni $\tilde{N}_1$ sur $\tilde{C}(\tilde{N}_2)$.

Soit $P \in X(K)$ tel que $\tilde{P} \notin \tilde{C}(\tilde{M})$ (en fait, dans la suite, ce sera P qui sera choisi en premier, puis M vérifiant certaines conditions décrites plus loin, mais pour l'instant M comme P font partie des données de la construction). On introduit l'application rationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad & \mathbb{P}^1_A \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{X} \\ & (u,v) \mapsto (((P \bullet F_M(u)) \bullet M_1) \bullet F_M(v)) \bullet M_2 \end{aligned}$$

Comme $\tilde{P}$ est différent de $\tilde{M} = \tilde{M}_1 = \tilde{M}_2$ et que $\tilde{P} \bullet \tilde{M}$ est lui aussi différent de $\tilde{M}$, et comme $\tilde{M}$ n'est pas situé sur une droite de Y, on voit que φ, comme composée d'applications rationnelles successivement définies aux points considérés[3], est définie au moins au point $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ de la fibre spéciale $\mathbb{P}^2_k$ de $\mathbb{P}^2_A$, et $\varphi(\tau_1, \tau_2) = P$. Par ailleurs, au moins pour $v \in \mathbb{P}^1_A$ dans un voisinage de Zariski de τ_2, on a $\varphi(\tau_1, v) = (P \bullet F_M(v)) \bullet M_2$ et, au moins pour $u \in \mathbb{P}^1_A$ dans un voisinage de Zariski de τ_1, on a $\varphi(u, \tau_2) = (P \bullet F_M(u)) \bullet M_1$: on voit donc, si on calcule les deux différentielles partielles de φ en $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$, en réduction à k, qu'elles sont non nulles et non colinéaires, puisque la courbe $\tilde{C}(\tilde{M})$ a deux branches distinctes en $\tilde{M}$ (et que l'application $\tilde{N} \mapsto (\tilde{P} \bullet \tilde{N}) \bullet \tilde{M}$ est un automorphisme birationnel). Ainsi, la différentielle (totale) de φ en $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ est bijective en réduction à k. On a donc prouvé :

Construction 5. *Soit $P \in X(K)$ quelconque. Alors il existe $\varphi\colon \mathbb{P}^1_A \times \mathbb{P}^1_A \dashrightarrow \mathcal{X}$ telle que $\varphi(\tau_1, \tau_2) = P$ pour un certain $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{P}^1_K(K) \times \mathbb{P}^1_K(K)$ en lequel*

[3] C'est-à-dire qu'il n'y a jamais à restreindre et à prolonger.

φ est définie, ainsi qu'en sa réduction $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$, et a une différentielle bijective en réduction à k.

(La seule chose à observer est qu'une fois P fixé on peut trouver $\tilde{M}$, puis M, pour faire la construction : et c'est bien possible car la proposition 4 permet de choisir M avec $\tilde{M} \notin \tilde{C}(\tilde{P}) \cup \tilde{D}(\tilde{P})$ — où $\tilde{D}(\tilde{P})$ désigne la courbe des points $\tilde{M} \in Y(k)$ tels que $\tilde{P} \in \tilde{C}(\tilde{M})$.)

Notamment, φ est étale au point $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ de la fibre spéciale (la platitude découle par exemple de [3], III, lemme 10.3a). En particulier, φ est dominante. Cette construction démontre de nouveau que X est unirationnelle, mais par une application rationnelle φ qui a la vertu qu'elle prend la valeur P (quelconque fixée) en un certain point rationnel particulier, que sa spécialisation est encore dominante, et plus précisément sa différentielle (en spécialisation, toujours) est bijective au point rationnel particulier.

Explicitons maintenant les conséquences de cette construction :

Proposition 6. *Soit $P \in X(K)$ quelconque. Alors il existe un ouvert de Zariski V non vide de Y tel que pour tout $Q^* \in X(\hat{K})$ dont la spécialisation $\tilde{Q}$ vérifie $\tilde{Q} \in V(k)$ et tout voisinage v-adique H de Q^* il existe un $Q \in X(K) \cap H$ pour lequel, de plus, il existe un morphisme $\psi \colon \mathbb{P}^1_K \to X$ avec $\psi(0) = P$ et $\psi(\infty) = Q$ (les points rationnels P et Q sont « directement R-équivalents »).*

Démonstration. Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{P}^1_A \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbb{P}^1_A$ un ouvert de Zariski de $\mathcal{X}$ sur lequel φ, construit plus haut, est défini et étale — on sait de plus qu'on peut trouver $\mathcal{U}$ ayant une intersection non vide avec la fibre spéciale, par exemple contenant $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$. On a donc $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ étale (tout défini sur $\operatorname{Spec} A$). Soit $V \subseteq Y$ l'ouvert de Zariski image par $\tilde{\varphi}$ de $\mathcal{U} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} k$. Si $Q^* \in \mathcal{X}(\hat{A}) = X(\hat{K})$ vérifie $\tilde{Q} \in V(k)$, alors le lemme de Hensel (appliqué à φ au-dessus de Q^*, sachant que $\tilde{Q}$ se relève par $\tilde{\varphi}$) assure l'existence de $(\delta_1^*, \delta_2^*) \in \mathbb{P}^1_K(\hat{K}) \times \mathbb{P}^1_K(\hat{K})$ tels que $\varphi(\delta_1^*, \delta_2^*) = Q^*$. On peut donc trouver un tel $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{P}^1_K(K) \times \mathbb{P}^1_K(K)$ tel que $\varphi(\delta_1, \delta_2)$ soit dans le voisinage H prescrit, ce qui définit $Q \in X(K)$. Enfin, quitte à composer φ avec un morphisme $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K \times_{\operatorname{Spec} K} \mathbb{P}^1_K$ qui envoie 0 sur (τ_1, τ_2) et ∞ sur (δ_1, δ_2), on a le résultat souhaité. $\square$

On a en fait plus fort — voici atteint le but souhaité, toute classe de R-équivalence de $X(K)$ est dense dans $X(\hat{K})$:

Proposition 7. *Soit $P \in X(K)$ quelconque. Alors pour tout $Q^* \in X(\hat{K})$ et tout voisinage v-adique H de Q^*, il existe un $Q \in X(K) \cap H$ qui est directement R-équivalent à P.*

Démonstration. Écrivons $P = P_1 \bullet P_2$ avec $P_1, P_2 \in X(K)$, où $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ sont distincts et ne sont situés sur aucune droite de Y : d'après la proposition 4, il est certainement possible d'arriver à une telle écriture (on choisit d'abord $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$, puis P_1, et enfin on pose $P_2 = P \bullet P_1$). D'après le corollaire précédent, il existe un ouvert de Zariski V non vide de Y tel que pour tous Q_1^* et Q_2^* de $X(\hat{K})$ se spécialisant dans V et tous voisinages v-adiques H_1 et H_2 de Q_1^* et Q_2^* respectivement on puisse trouver des $Q_1, Q_2 \in X(K)$ appartenant à H_1 et H_2 respectivement, et qui soient directement R-équivalents à P_1 et P_2 respectivement. Appelons $\tilde{Q}$ la spécialisation de Q^* et choisissons une écriture $\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 \bullet \tilde{Q}_2$, où $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ sont dans $V(k)$, sont distincts et ne sont situés sur aucune droite de Y. Relevons $\tilde{Q}_1$ en un $Q_1^* \in X(\hat{K})$ par ailleurs arbitraire, et posons $Q_2^* = Q^* \bullet Q_1^*$. Par continuité v-adique de l'application de composition au voisinage de (Q_1^*, Q_2^*), on peut trouver des voisinages H_1 et H_2 de Q_1^* et Q_2^* respectivement tels que $\bullet$ envoie $H_1 \times H_2$ dans H. Soit $Q_1 \in X(K) \cap H_1$ qui est directement R-équivalent à P_1, et $Q_2 \in X(K) \cap H_2$ qui est directement R-équivalent à P_2. Soient $\psi_i \colon \mathbb{P}^1_K \to X$ (pour $i = 1, 2$) tels que $\psi_i(0) = P_i$ et $\psi_i(\infty) = Q_i$. On pose $\psi(t) = \psi_1(t) \bullet \psi_2(t)$ et $Q = \psi(\infty) = Q_1 \bullet Q_2$. Alors manifestement l'application rationnelle ψ, définie au moins en 0 et ∞ s'étend en un morphisme $\mathbb{P}^1 \to X$ qui montre que P et Q sont directement R-équivalents, et par ailleurs $Q \in X(K) \cap H$. $\square$

2 Approximation en plusieurs places de bonne réduction

Notations et hypothèses : Soient, comme dans la partie précédente, k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, Γ une courbe intègre sur k, qu'on peut toujours supposer propre et lisse, et $K = k(\Gamma)$ son corps des fonctions. Soit $S \subset \Gamma$ un ensemble fini de places de K, pour chacune v desquelles on notera $A_v = \{f \in K : v(f) \geq 0\}$ l'anneau des entiers correspondant, anneau de valuation discrète dont on note $\mathfrak{m}_v = \{f \in K : v(f) \geq 1\}$ l'idéal maximal et π_v une uniformisante. Soit $\hat{A}_v$ le complété de A_v pour sa valuation v, et $\hat{K}_v = \mathrm{Frac}(\hat{A}_v)$ le corps des fractions de $\hat{A}_v$. Soit $A = \bigcap_{v \in S} A_v \subseteq K$ l'anneau des éléments de K entiers en toutes les places de S.

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^3_A$ une surface cubique sur A dont on note $X = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} K$ la fibre générique et $Y_v = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} A_v} \operatorname{Spec} k_v$ la fibre spéciale (sur $k_v \cong k$). On suppose que X est lisse.

On suppose que toutes les places v de S sont des places de bonne réduction de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire que $\mathcal{X}$ est lisse sur A (tous les Y_v sont lisses).

On cherche à prouver que l'image de la flèche $X(K) \to \prod_{v \in S} X(\hat{K}_v)$ est dense (où le but est muni de la topologie produit des topologies v-adiques). Autrement dit, que si $P_v \in X(\hat{K}_v)$ pour tout $v \in S$ et que U_v est un voisinage v-adique de P_v pour tout $v \in S$, alors il existe un $P \in X(K)$ tel que $P \in U_v$ pour tout $v \in S$. Or pour cela (et puisque $X(K)$ n'est pas vide), il suffit manifestement (par récurrence sur $\operatorname{card} S$) de prouver que si $P_0 \in X(K)$ est donné et que pour tout $v \in S$ on se donne un voisinage v-adique U_v de P_0 sauf pour un certain $w \in S$ pour lequel U_w est un voisinage w-adique d'un $P_w \in X(\hat{K}_w)$, alors il existe $P \in X(K)$ tel que $P \in U_v$ pour tout $v \in S$. Enfin, d'après la partie précédente, on peut supposer $P_w \in X(K)$.

En fait, le résultat de la section précédente montre qu'on peut plus précisément supposer que $P_w \in X(K)$ est directement R-équivalent à un point initial fixé quelconque dans $X(K)$, dont on peut supposer que c'est P_0 : soit donc $\psi \colon \mathbb{P}^1_K \to X$ tel que $\psi(0) = P_0$ et $\psi(\infty) = P_w$. Mais alors, en appliquant l'approximation faible sur $\mathbb{P}^1_K$, en trouvant un $t \in \mathbb{P}^1_K(K)$ qui approche ∞ en la place w et 0 en toutes les places $v \in S \setminus \{w\}$, on voit que $P = \psi(t)$ fournit le point désiré.

Remerciements : Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène pour m'avoir patiemment aidé à mettre en forme les arguments contenus dans cet article, ainsi qu'Antoine Ducros pour m'avoir invité à Rennes pour exposer ce résultat.

Références

[1] J.-L. Colliot-Thélène & P. Gille, « Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable », *in* : *Arithmetic of higher dimensional arithmetic varieties*, B. Poonen & Yu. Tschinkel (éd.), Birkhäuser, Progress in Mathematics, 2003, p. 121–133.

[2] T. Graber, J. Harris & J. Starr, « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.*, **16** (2003), 57–67.

[3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 52.

[4] N. Katz, « Pinceaux de Lefschetz : théorème d'existence » (exposé XVII), *in* : *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie : Groupes de monodromie en géométrie algébrique II*, A. Grothendieck & al. (SGA7-II).

[5] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32.

[6] J. Kollár, *Low degree polynomial equations : arithmetic, geometry and topology*, preprint, disponible sur `www.arxiv.org` comme `alg-geom/9607016`.

[7] J. Kollár, « Unirationality of cubic hypersurfaces », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002) n°3, 467–476.

[8] D. A. Madore, « Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps p-adiques », *manuscripta mathematica* **110** (2003), 171–185.

[9] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).

[10] Sir Peter Swinnerton-Dyer, « Weak approximation and R-equivalence on cubic surfaces », *in* : *Rational points on algebraic varieties*, É. Peyre & Yu. Tschinkel (éd.), Birkäuser, Progress in Mathematics **199**, p. 359–406.