1. Soit A un anneau et B une A-algèbre (non nécessairement commutative) non nulle : montrer que $B \otimes_A B$ est encore non nulle.

Corrigé. L'application A-bilinéaire $B \times B \to B$ envoyant (x, y) sur xy définit une flèche A-linéaire $B \otimes_A B \to B,\ x \otimes y \mapsto xy$: comme l'image de $1 \otimes 1$ par celle-ci est $1 \in B$, qui n'est pas nul, c'est bien que $B \otimes_A B$ n'est pas nul. (Remarquons qu'on n'a même pas besoin du fait que l'algèbre est associative, seulement de l'existence d'une unité multiplicative.) ✓

2. Décrire, en tant qu'algèbre sur $\mathbb{R}$, le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On précisera les deux structures de $\mathbb{C}$-algèbre sur ce produit tensoriel (provenant de la multiplication sur le facteur de gauche ou sur le facteur de droite).

Corrigé. On peut dire que $\mathbb{C}$ est engendré, en tant qu'algèbre sur $\mathbb{R}$, par un seul élément, i, qui vérifie $i^2 + 1 = 0$; en autres termes, $\mathbb{C}$ est le quotient $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ de l'algèbre $\mathbb{R}[t]$ des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée t par l'idéal $(t^2 + 1)$ engendré par la relation en question (et on note i l'image de $t \in \mathbb{R}[t]$ dans ce quotient). De cette description $\mathbb{R}[t] \xrightarrow{\times(t^2+1)} \mathbb{R}[t] \to \mathbb{C} \to 0$ il ressort, quitte à tensoriser (à gauche, mettons) par $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est le quotient de $\mathbb{C}[t]$ par l'idéal engendré par $t^2 + 1$, c'est-à-dire $\mathbb{C}[t] \xrightarrow{\times(t^2+1)} \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to 0$. Or $t^2 + 1$, maintenant, se décompose comme $(t - i)(t + i)$. Il s'ensuit qu'on peut représenter la classe d'un $f \in \mathbb{C}[t]$ dans $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}[t]/(t^2 + 1)$ comme le couple $(f(i), f(-i))$ dans $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Ceci définit un isomorphisme $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ envoyant $z \otimes 1$ (qui se représente par $z \in \mathbb{C}[t]/(t^2 + 1)$) sur (z, z), et $z \otimes i$ (qui se représente par $zt \in \mathbb{C}[t]/(t^2 + 1)$) sur $(zi, -zi)$, ou, de façon plus générale, $z \otimes z' \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par $(zz', z\bar{z}') \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Cet isomorphisme, tel qu'on l'a construit, est un isomorphisme non seulement pour la structure de $\mathbb{R}$-algèbre, mais aussi pour la structure de $\mathbb{C}$-algèbre venant du facteur de gauche (soit celle donnée par la flèche $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},\ z \mapsto z \otimes 1$: cela se voit aussi directement), autrement dit $z \cdot (z_1, z_2) = (zz_1, zz_2)$. Pour l'autre structure de $\mathbb{C}$-algèbre, il faut ajouter une conjugaison complexe sur le deuxième facteur $\mathbb{C}$, soit $z \cdot (z_1, z_2) = (zz_1, \bar{z}z_2)$. ✓

3. On appelle algèbre des quaternions, et on note $\mathbb{H}$, l'algèbre (associative mais non commutative) de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (on vérifiera que ces relations donnent bien une algèbre de dimension 4...). Montrer qu'il s'agit d'une algèbre à divisions (i.e., tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse) et montrer que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (on pourra par exemple introduire les matrices $\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) et (†) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ (on pourra s'inspirer des matrices utilisées pour répondre à la question précédente).

Corrigé. D'abord $\mathbb{H}$ a bien la dimension annoncée : elle a une base comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel formée des quatre éléments $1, i, j, k$ puisque tout produit de deux tels éléments s'exprime comme combinaison des autres (par exemple $ij = k$ car $ij = -ij(k^2) = -(ijk)k = k$). Ensuite, on vérifie facilement que $(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, ce qui montre que tout quaternion $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ non nul admet un inverse (à savoir $\frac{1}{N}(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k)$ où $N = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ vérifie $N \neq 0$ dans $\mathbb{R}$) : donc $\mathbb{H}$ est bien une algèbre à divisions.

Le produit tensoriel $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par les mêmes générateurs et relations, sur $\mathbb{C}$ cette fois. Montrons donc qu'on peut trouver trois matrices $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\sigma_i^2 = \sigma_j^2 = \sigma_k^2 = \sigma_i\sigma_j\sigma_k = -1$ et qui engendrent $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'algèbre (pour cela, il suffit bien sûr qu'avec l'identité elles l'engendrent en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel). On prend

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \ \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \ \sigma_k = \sigma_i\sigma_j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et on a bien les relations souhaitées, comme on le vérifie immédiatement.

Pour prouver que $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$, il s'agit de trouver seize matrices $\lambda_{1\otimes 1}, \ldots, \lambda_{k\otimes k} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ qui en forment une base correspondant à la base $\{1\otimes 1, 1\otimes i, 1\otimes j, 1\otimes k, i\otimes 1, \ldots, k\otimes k\}$ de $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ et vérifient les mêmes relations. On part des matrices $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ obtenues ci-dessus : on voudrait poser, par exemple, $\lambda_{i\otimes j} = \sigma_i \otimes \sigma_j$, mais ça ne donne pas une matrice réelle ; au lieu de ça, on fait usage du fait que σ_j est à coefficients réels : en posant

$$\lambda_{1\otimes 1} = 1 \otimes 1 \ , \ \ \lambda_{i\otimes 1} = -i\, \sigma_i \otimes \sigma_j \ , \ \ \lambda_{j\otimes 1} = \sigma_j \otimes 1 \ , \ \ \lambda_{k\otimes 1} = -i\, \sigma_k \otimes \sigma_j$$

on a quatre matrices réelles (4×4) qui vérifient les relations définissant les quaternions, et n'importe laquelle de ces quatre matrices commute à n'importe laquelle des quatre suivantes :

$$\lambda_{1\otimes 1} = 1 \otimes 1 \ , \ \ \lambda_{1\otimes i} = -i\, \sigma_j \otimes \sigma_i \ , \ \ \lambda_{1\otimes j} = 1 \otimes \sigma_j \ , \ \ \lambda_{1\otimes k} = -i\, \sigma_j \otimes \sigma_k$$

Ceci permet de définir les seize matrices recherchées (par exemple $\lambda_{i\otimes j} = \lambda_{i\otimes 1}\lambda_{1\otimes j} = -i\sigma_i \otimes 1$ qui vérifient toutes les relations souhaitées et qui forment une base sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ (elles sont réelles et sur $\mathbb{C}$ elles sont libres car il y en a une et une seule proportionnelle à chaque $\sigma_1 \otimes \sigma_2$). On a donc bien $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$. (Une autre méthode, plus canonique, consiste à identifier $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \cong \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ par $x \otimes y \mapsto xz\bar{y}$.) ✓

4 (algèbres de Clifford). Soit k un corps, qu'on supposera pour simplifier de caractéristique différente de 2 (c'est-à-dire que $2 \neq 0$ dans k), V un k-espace vectoriel de dimension finie et $q\colon V \to k$ une forme quadratique sur V. On appelle *algèbre de Clifford* associée à q le quotient $C(q)$ de l'algèbre tensorielle $T^\bullet(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ de V par son idéal bilatère engendré par tous les éléments de la forme $x \otimes x - q(x)\,1$ (où x parcourt V). Montrer que $C(q)$ a une dimension finie sur k qu'on calculera. Que vaut $C(q)$ si $q = 0$? Que vaut $C(q)$ si q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}$ donnée par $q(x) = -x^2$ (respectivement $q(x) = +x^2$) ?

Montrer que pour tout r il existe un espace vectoriel de dimension r de matrices réelles (de taille non précisée) dans lequel seule la matrice nulle n'est pas inversible.

Corrigé. Soit $v_1, \ldots, v_r$ une base orthogonale[1] de V pour q. Notons e_i l'image de v_i dans $C(q)$. Cherchons à déterminer les relations entre les e_i. Tout d'abord, on a $e_i^2 = q(v_i)$ pour tout i. D'autre part, pour $i \neq j$ on a $(e_i + e_j)^2 = q(v_i + v_j) = q(v_i) + q(v_j)$ (cette dernière égalité utilisant l'orthogonalité) mais aussi $(e_i+e_j)^2 = e_i^2+e_j^2+e_ie_j+e_je_i = q(v_i)+q(v_j)+e_ie_j+e_je_i$, ce qui prouve que $e_je_i = -e_ie_j$. Par conséquent, le produit d'un nombre quelconque des e_i se ramène au signe près à un produit ordonné, et ensuite à une constante près à des e_i tous distincts, donc la dimension de $C(q)$ est au plus 2^r (le nombre de sous-ensembles de $\{1, \ldots, r\}$) où r est la dimension de V.

Pour montrer que la dimension est exactement 2^r, on appelle temporairement $C'(q)$ le k-espace vectoriel dont une base est l'ensemble des produits formels $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ avec $i_1 < \ldots < i_s$ dans $\{1, \ldots, r\}$ (il est donc de dimension 2^r exactement), qu'on munit d'une structure d'algèbre en imposant les relations $e_je_i = -e_ie_j$ et $e_i^2 = q(e_i)\,1$ (autrement dit, un produit quelconque d'éléments de la base se forme en prenant le produit formellement et en se ramenant à un $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ avec $i_1 < \ldots < i_s$ grâce à ces deux relations) ; l'associativité de $C'(q)$ est

([1]) On utilise ici le fait que la caractéristique de k n'est pas 2.

claire. On vient de voir que $C'(q)$ se surjecte sur $C(q)$ (par la flèche évidente) et on veut la réciproque ; comme $C(q)$ est un quotient de l'algèbre tensorielle $T^\bullet(V)$ et qu'on a une flèche surjective évidente $T^\bullet(V) \to C'(q)$, il s'agit simplement de voir que réciproquement toutes les relations $x^2 = q(x)$ (pour $x \in V$) sont vérifiées dans $C'(q)$, de sorte qu'on aura une surjection dans l'autre sens, et $C(q)$ et $C'(q)$ seront bien isomorphes. Or manifestement si on décompose $x = \sum_i \xi_i v_i$ sur la base v_i on développe $x^2 = \sum_{i,j} \xi_i \xi_j e_i e_j$ et grâce aux relations d'anticommutation entre les e_i on a $x^2 = \sum_i \xi_i^2 e_i^2 = \sum_i \xi_i^2 q(e_i) = q(x)$, comme on le voulait.

Si $q = 0$, l'algèbre de Clifford $C(q)$ est simplement l'algèbre extérieure $\wedge^\bullet(V)$ de V. Pour $q(x) = -x^2$ sur $\mathbb{R} = \mathbb{R}e$, on a $e^2 = q(e) = -1$ donc $C(q) = \mathbb{C}$ (en envoyant $\alpha + \beta e$ sur $\alpha + \beta i$) ; pour $q(x) = x^2$, on a $e^2 = 1$ et on voit que $C(q) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (en envoyant $\alpha + \beta e$ sur $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$).

Enfin, donnons-nous $r \geq 0$, et soit V un espace vectoriel réel de dimension r muni d'une forme quadratique q anisotrope (i.e., le seul $x \in V$ tel que $q(x) = 0$ est $x = 0$: par exemple $V = \mathbb{R}^r$ muni de la forme euclidienne q usuelle). La multiplication par un $x \in V$ non nul quelconque sur l'algèbre de Clifford $C(q)$ est bijective (son inverse est $x/q(x)$), donc définit, quitte à prendre une base quelconque de $C(q)$ une matrice de taille $2^r \times 2^r$ inversible, et l'espace vectoriel de dimension r de toutes les matrices de multiplication par des $x \in V$ ne contient donc que la matrice nulle comme matrice non inversible, ce qu'on souhaitait. ✓

5. Soit $f\colon V \to V$ un endomorphisme (k-linéaire) d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k : on considère V comme un $k[t]$-module par la multiplication $P \cdot x = P(f)(x)$ (cf. exercice 5 de la feuille n^{o}1). Décrire autant que possible l'algèbre extérieure $\wedge^\bullet_{k[t]} V$ de V (comme $k[t]$-module) et notamment la dimension (comme k-espace vectoriel) de chaque $\wedge^\ell_{k[t]} V$.

Corrigé. Décomposons V comme $\bigoplus_{i,j} k[t]/(P_i^{n_{ij}})$ où les $P_i \in k[t]$ sont des polynômes irréductibles deux à deux étrangers et les n_{ij} des entiers naturels non nuls, et où f opère sur chaque $V_{ij} = k[t]/(P_i^{n_{ij}})$ comme la multiplication par t. Alors $\wedge^\ell V$ se décompose comme somme directe, sur tous les ensembles S de cardinal ℓ de couples (i,j), du produit tensoriel $W_S = \bigotimes_{(i,j)\in S} V_{ij}$ (produit tensoriel sur $k[t]$), chacun de ces W_S correspondant au $k[t]$-module engendré par les $v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$ avec exactement un $v_h \in V_{ij}$ pour chaque couple $(i,j) \in S$ (on ne peut avoir deux v_h dans le même sans quoi le produit extérieur serait nul). Par ailleurs, si S contient deux couples (i,j) avec des valeurs différentes de i (donc relatifs à des P_i, P_i' étrangers), on a $W_S = 0$ (car $(k[t]/(P_i^{n_{ij}})) \otimes_{k[t]} (k[t]/(P_{i'}^{n_{i'j'}})) = 0$ comme on le voit grâce à une relation de Bézout entre P_i et $P_{i'}$). À part $\wedge^0 V = W_\varnothing = k[t]$, on peut donc écrire chaque $\wedge^\ell V$ comme une somme directe sur tous les i de $\wedge^\ell V_i$ où $V_i = \bigoplus_j k[t]/(P_i^{n_{ij}})$. À i égal on a $(k[t]/(P_i^{n_{ij}})) \otimes_{k[t]} (k[t]/(P_i^{n_{ij'}})) = k[t]/(P_i^{\min(n_{ij},n_{ij'})})$. Ordonnons les n_{ij} comme $n_{i,0} \geq n_{i,1} \geq \cdots \geq n_{i,r_i}$: alors $\wedge^\ell V_i$ s'écrit comme somme directe des $k[t]/(P_i^{n_{ij}})$ avec multiplicités $C_j^\ell = \frac{j!}{\ell!(j-\ell)!}$ (où on convient que $C_j^\ell = 0$ si $\ell > j$), car C_j^ℓ compte le nombre de façons de choisir ℓ entiers distincts entre les $n_{i,j'}$ dont le plus petit soit $n_{i,j}$. En particulier, la dimension sur k de $\wedge^\ell V_i$ est $m_i(n_{i,\ell} + (\ell+1)n_{i,\ell+1} + \cdots + C_{r_i}^\ell n_{i,r_i})$ avec $m_i = \deg P_i$, et la dimension de $\wedge^\ell V$ est la somme de ces quantités pour tous les i (pour $\ell > 0$; pour $\ell = 0$, la dimension est celle de $k[t]$ donc infinie ; naturellement, pour $\ell = 1$ on retrouve la somme des $m_i n_{ij}$ donc $\dim_k V$). ✓

Motivations : L'exercice 1 est à comparer avec l'exercice 1 de la feuille n^{o}1 où il est prouvé que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. L'exercice 2 est une introduction à un point de vue possible sur la théorie de Galois (si K est une extension finie d'un corps k, que peut-on dire de $K \otimes_k K$ en tant qu'algèbre ?), et l'exercice 3 lui fait naturellement suite et pourrait servir d'introduction au groupe de Brauer (ici, l'algèbre des quaternions constitue une classe dans le groupe de Brauer dont on montre qu'elle est déployée par $\mathbb{C}$ et qu'elle est de 2-torsion). L'exercice 4 introduit une construction algébrique très importante (par exemple dans l'étude des formes quadratiques) ; on pourrait le prolonger en se demandant par exemple quelles sont les algèbres de Clifford sur $\mathbb{R}$ et quels en sont les produits tensoriels. L'exercice 5 est du remplissage...