Un labyrinthe hyperbolique en JavaScript

Séminaire Codes Sources

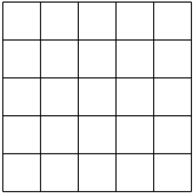
David A. Madore
Télécom ParisTech
david.madore@enst.fr

30 avril 2015

Plan

Introduction

Beaucoup de jeux informatiques se déroulent sur un pavage euclidien carré :



Éventuellement un pavage triangulaire ou hexagonal.

Éventuellement rendu périodique en identifiant les bords (ce qui mathématiquement donne un **tore plat**).

- Peut-on concevoir des jeux dans une autre géométrie ?
- Par quoi remplacer le pavage carré ?
- Comment rendre les choses périodiques ?
- Comment implémenter en pratique ?

Plan

Trois géométries

Il existe trois géométries à courbure constante (ou « homogènes et isotropes ») en 2 dimensions :

- **Géométrie euclidienne** (courbure nulle)
  - somme des angles d'un triangle $= \pi$,
  - une seule parallèle à une droite donnée par un point donné.
- **Géométrie sphérique/elliptique** (courbure positive)
  - somme des angles d'un triangle $> \pi$,
  - pas de droites parallèles.
- **Géométrie hyperbolique** (courbure négative)
  - somme des angles d'un triangle $< \pi$,
  - beaucoup de parallèles.

Géométrie euclidienne

La géométrie euclidienne plane est celle enseignée au lycée et étudiée depuis l'Antiquité.

Entre autres propriétés :

- loi des cosinus dans les triangles : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (cas particulier : formule de Pythagore pour $\gamma = \pi/2$) ; loi des sinus : $(a : b : c) = (\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma)$;
- somme des angles d'un triangle $= \pi$;
- existence de *similitudes* ($\leftrightarrow$ homothéties) : on peut changer la taille d'une figure sans changer sa forme ;
- parallèles : deux droites partant « dans la même direction » avec un petit écart restent à cette même distance.

Cette géométrie sera le cas limite des autres géométrie pour des figures très petites.

Géométrie sphérique/elliptique

On confondra abusivement géométrie sphérique et elliptique (en principe, à la différence de la première, **la seconde identifie les points antipodaux**).

C'est la géométrie de la surface de la sphère (par exemple : la Terre ; donc : importance en cartographie).

- Unité **naturelle** de longueur : le rayon de la sphère (par convention $= 1$; i.e., distances mesurées en radians) ;
- loi des cosinus : $\cos c = \cos a \, \cos b + \sin a \, \sin b \, \cos \gamma$; duale : $\cos \gamma = -\cos \alpha \, \cos \beta + \sin \alpha \, \sin \beta \, \cos c$; loi des sinus : $(\sin a : \sin b : \sin c) = (\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma)$;
- excès angulaire d'un triangle = son aire (en stéradians) ;
- la forme d'un triangle détermine sa taille ($\Rightarrow$pas de similitudes) ; pas de « boussole » globale ;
- pas de parallèles (deux grands cercles se coupent toujours) ; deux droites partant « dans la même direction » avec un petit écart *se rapprochent*.

Deux projections de la sphère

Projection stéréographique (utilisée pour les régions polaires)

- projection de la sphère sur son plan équatorial (ou tangent au pôle sud) depuis le pôle nord (→point arbitraire),
- préserve les angles orientés (« **conforme** »), i.e., préserve localement les formes ; et préserve les cercles.

Stéréographique

Gnomonique

Projection gnomonique (peu utilisée en carto)

- projection de la sphère sur un plan tangent depuis le centre [ne fonctionne que pour un hémisphère],
- préserve les droites (=grands cercles), c'est essentiellement la seule.

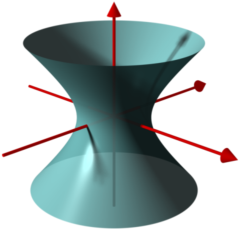
Géométrie hyperbolique

Quelques analogies avec la géométrie sphérique :

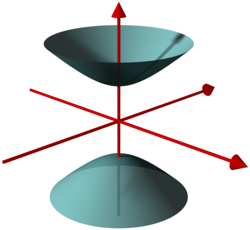
[Rappel : $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.]

- Existence d'une unité **naturelle** de longueur ;
- loi des cosinus :
$\cosh c = \cosh a\ \cosh b - \sinh a\ \sinh b\ \cos\gamma$;
duale : $\cos\gamma = -\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta\ \cosh c$; loi des sinus : $(\sinh a : \sinh b : \sinh c) = (\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma)$;
- défaut angulaire d'un triangle = son aire ;
- la forme d'un triangle détermine sa taille ($\Rightarrow$pas de similitudes) ; pas de « boussole » globale ;
- beaucoup de parallèles ; deux droites partant « dans la même direction » avec un petit écart *s'éloignent* ;
- longueur du cercle de rayon r vaut : $2\pi\sinh r$ (exponentiel en r ; cas euclidien $2\pi r$, sphérique $2\pi\sin r$).

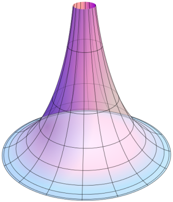
Le plan hyperbolique N'EST PAS



Hyperboloïde
à une nappe



Hyperboloïde
à deux nappes

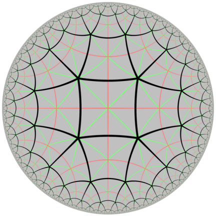
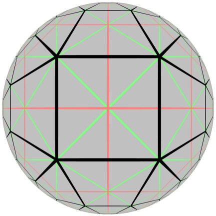


Pseudosphère

Hilbert (1901) : Le plan hyperbolique ne se plonge pas isométriquement dans l'espace euclidien de dimension 3.

On va le représenter avec des *analogues* des projections stéréographique et gnomonique de la sphère.

Poincaré et Beltrami-Klein

Prop.tés	Conforme +prés. les cercles	Préserve les droites
Analogue	Stéréographique	Gnomonique
Plan hyp.	Disque de Poincaré	Beltrami-Klein
		

- Dans les deux cas, le plan hyperbolique est représenté comme l'intérieur d'un disque. Il est néanmoins infini !
- Les points du cercle-bord sont appelés **points idéaux** ou **à l'infini** (ne font pas partie du plan hyperbolique). Ils coïncident sur ces deux projections.

Poincaré et Beltrami-Klein (suite)

- Le modèle du disque de Poincaré permet de « voir plus loin » (deux fois plus loin, même si les deux modèles représentent tout le plan hyperbolique !).

  Célèbre par des dessins d'Escher (*Cirkellimiet*), inspirés par Coxeter.

  Il est plus utilisé par les mathématiciens (avec le demi-plan de Poincaré). Possède des liens profonds avec l'analyse complexe (théorème de l'application conforme de Riemann).

  Les droites y deviennent des (arcs de) cercles coupant orthogonalement le cercle à l'infini en projection.

- Un habitant de l'espace hyperbolique de dimension 3 verrait un plan hyperbolique selon le modèle de Beltrami-Klein.

- Comme pour la sphère, il existe beaucoup d'autres projections possibles du plan hyperbolique ! (P.ex. : proj. azimutale équivalente de Lambert.)

Coordonnées polaires

On choisit (arbitrairement[†]) une origine O et une direction Δ partant de cette origine.

On peut alors repérer un point M par :

- sa distance $r = OM$ à l'origine,
- l'angle orienté $\theta = (\Delta, OM)$ (« azimut »).

Ce sont les coordonnées polaires de M (ceci fonctionne en euclidien, elliptique, hyperbolique).

Si O est le centre de projection, l'effet des projections de Poincaré, resp. BK, sur les coordonnées polaires est de :

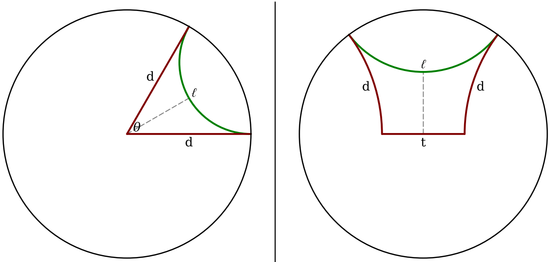
- préserver θ (la projection est azimutale),
- envoyer le point à la distance $\tanh \frac{r}{2}$, resp. $\tanh r$, de l'origine.

[Rappel : $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ a pour limite 1 quand $x \to +\infty$.]

[†] Le plan hyperbolique est *homogène*.

Le plan hyperbolique est « labyrinthique »

Idée : Dans le plan hyperbolique, la ligne droite est bien le plus court chemin entre deux points, mais il est « à peine plus court » qu'un chemin en zig-zag typique.



$$\ell \approx 2d + 2\log\sin\frac{\theta}{2} \qquad \Big| \qquad \ell \approx 2d + 2\log\sinh\frac{t}{2}$$

Si un joueur se trompe de direction ou de point de départ, il devra « presque » retracer son chemin.

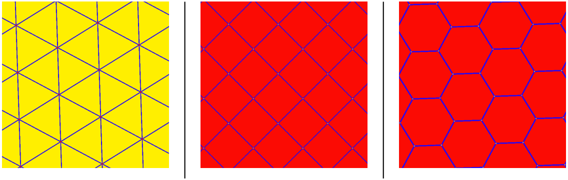
La métrique hyperbolique se comporte souvent comme un **arbre** (au sens mathématique/informatique), à peine épaissi.

Pavages réguliers du plan

On cherche à paver régulièrement le plan par des n-gones réguliers dont k se rencontrent à chaque sommet $(n, k \geq 3)$.

Dans le **monde euclidien**, ceci est possible ssi $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$.
Il y a trois solutions :

- $(n, k) = (3, 6)$: pavage du plan par des triangles équilatéraux ;
- $(n, k) = (4, 4)$: pavage du plan par des carrés ;
- $(n, k) = (6, 3)$: pavage du plan par des hexagones (nids d'abeille : « dual » du premier).



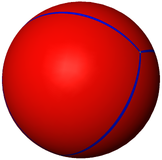
Impossible pour $n = 5$, car $\frac{10}{3}$ n'est pas entier : 3 pentagones ne font pas le tour, 4 font trop.

Pavages réguliers de la sphère

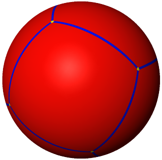
On cherche à paver régulièrement la sphère par des n-gones réguliers dont k se rencontrent à chaque sommet ($n, k \geq 3$).

Possible **sur la sphère** ssi $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$.

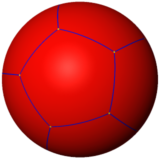
Ce sont les fameux **solides réguliers** (platoniciens), « gonflés » jusqu'à leur sphère circonscrite.



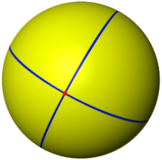
$(3,3)$ tétraèdre



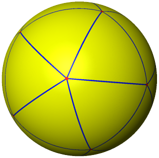
$(4,3)$ cube



$(5,3)$ dodécaèdre



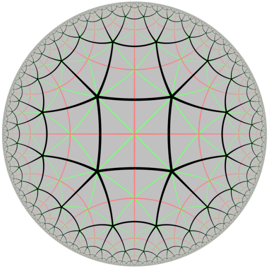
$(3,4)$ octaèdre



$(3,5)$ icosaèdre

Pavages réguliers du plan hyperbolique

On cherche à paver régulièrement le plan hyperbolique par des n-gones réguliers dont k se rencontrent à chaque sommet ($n, k \geq 3$).
Possible **sur le plan hyperbolique** ssi $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$.
Infinité de solutions. Cases d'autant plus grandes que $\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ est petit.



En noir : $(n, k) = (4, 5)$ (pavage par des « carrés » d'angle $\frac{2\pi}{5}$ à chaque sommet).

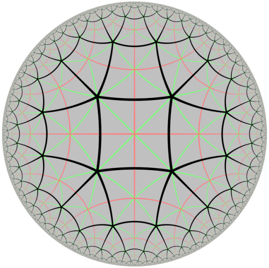
En rouge : $(n, k) = (5, 4)$ (pavage par des pentagones réguliers d'angles droits), dual du précédent.

Avantage de $n = 4$: le joueur peut aller tout droit, tourner à gauche ou à droite de $\pi/2$ (mouvements habituels).
On va se concentrer sur le pavage $(n, k) = (4, 5)$.

Comment repérer la position du joueur ?

Quelles coordonnées utiliser pour repérer la position du joueur dans le plan hyperbolique ?

- Les coordonnées polaires (ou les coordonnées de la projection de Poincaré / BK) ne sont pas utilisables parce que trop sensibles aux erreurs si on s'éloigne de l'origine.
- On veut/peut repérer (de façon exacte) la case du pavage où se trouve le joueur, mais comment étiqueter les cases ?



- Idée : repérer la suite des couleurs des lignes traversées (noir/rouge/vert) pour aller d'un triangle de référence au triangle à étiqueter. Mais elle *n'est pas unique*.
Et le nombre de cases accessibles en N mouvements croît expon^{t} en N.

Transf. de Möbius (=homographies complexes)

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

(où $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$).

- Préservent les angles (orientés) et envoient les cercles sur des cercles.
- Représentées par des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (à constante multiplicative près), composition par multiplication des matrices.
- Inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si $ad - bc = 1$.

Isométries directes hyperboliques

Transformations de Möbius préservant le cercle unité (globalement).

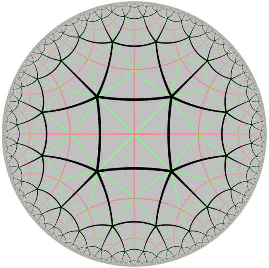
$$f(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \quad (|a|^2 - |b|^2 = 1)$$

- Composition par $[a, b]\,[a', b'] = [aa' + \bar{b}'b,\ b'a + b\bar{a}']$.
Inverse de $[a, b]$ est $[\bar{a},\ -b]$. (« Quaternions déployés. »)
- Stockables comme quatre nombres réels :
$\mathrm{Re}(a), \mathrm{Im}(a), \mathrm{Re}(b), \mathrm{Im}(b)$ (définis au signe près !).
- Ce sont les isométries directes (=déplacements) du plan hyperbolique vu comme le disque de Poincaré.

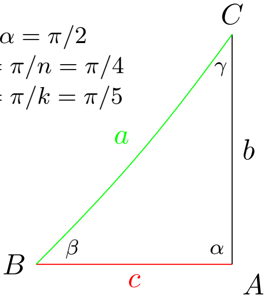
(Pour les isométries indirectes, remplacer z par $\bar{z}$.)

Exemples : $[e^{i\theta/2}, 0]$ rotation d'angle θ ; $[\cosh \frac{d}{2}, \sinh \frac{d}{2}]$ translation de distance hyperbolique d (envoie 0 en $\tanh \frac{d}{2}$).

Triangle fondamental du pavage



$$\alpha = \pi/2$$
$$\beta = \pi/n = \pi/4$$
$$\gamma = \pi/k = \pi/5$$

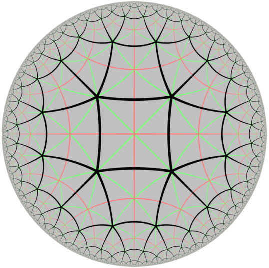


Loi des cosinus duale :

- $\cosh c = \dfrac{\cos\gamma + \cos\alpha\,\cos\beta}{\sin\alpha\,\sin\beta} = \dfrac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/4)} = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$
- $\cosh b = \dfrac{\cos\beta + \cos\gamma\,\cos\alpha}{\sin\gamma\,\sin\alpha} = \dfrac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/5)} = \dfrac{\sqrt{25+5\sqrt{5}}}{5}$
- $\cosh a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\,\cos\gamma}{\sin\beta\,\sin\gamma} = \dfrac{1}{\tan(\pi/4)\,\tan(\pi/5)} = \dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$

On pose $R = [e^{i\pi/4}, 0]$ et $T = [\cosh c, \sinh c]$.

Groupe d'isométries du pavage



$R = [e^{i\pi/4},\, 0]$
rotation d'angle $\pi/2$

$T = [\cosh c,\, \sinh c]$
translation d'une case ($2c$)

$R^4 = 1 \qquad [\Leftarrow n = 4]$
$(R^2T)^2 = 1$
$(RT)^5 = 1 \qquad [\Leftarrow k = 5]$

Chaque triangle correctement orienté, ou chaque double-triangle†, peut être obtenu à partir de celui de référence par un unique élément du *groupe d'isométries directes* $\langle R, T \mid R^4, (R^2T)^2, (RT)^5 \rangle$ du pavage.

Problèmes : Comment représenter un élément du groupe ? (Problèmes numériques demeurent.) Comment « rendre périodique » ?

†double-triangle := paire sép./ arête rouge = quart-de-case

Matrices 2×2 sur un corps fini

- $\mathbb{F}_{89} = \mathbb{Z}/89\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots, 88\}$ avec addition et multiplication modulo 89 ; c'est un corps (e.g. $2^{-1} = 45$ car $2 \times 45 \equiv 1 \pmod{89}$).
- $GL_2(\mathbb{F}_{89})$ (resp. $SL_2(\mathbb{F}_{89})$) = groupe des matrices 2×2 de déterminant $ad - bc \neq 0$ (resp. $= 1$), à coefficients dans $\mathbb{F}_{89}$ avec le produit usuel.
- $PGL_2(\mathbb{F}_{89})$: idem, en identifiant deux matrices proportionnelles ; représentation : premier coefficient non nul $= 1$. (Et $PSL_2(\mathbb{F}_{89})$: le déterminant est un carré.)

On pose

$$SL_2(\mathbb{F}_{89}) \ni \begin{pmatrix} 77 & 0 \\ 0 & 37 \end{pmatrix} \mapsto \bar{R} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 34 \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{F}_{89})$$

$$SL_2(\mathbb{F}_{89}) \ni \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 23 & 21 \end{pmatrix} \mapsto \bar{T} := \begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 35 & 1 \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{F}_{89})$$

Pourquoi ces nombres ?

“$\sqrt{5}$” $:= 70 \in \mathbb{F}_{89}$ (note : $70^2 = 4900 \equiv 5 \pmod{89}$)

“$\sqrt{3+\sqrt{5}}$” $:= 42 \in \mathbb{F}_{89}$ (note : $42^2 \equiv 3 + 70 \pmod{89}$)

“$\cosh c$” $:= \frac{\text{“}\sqrt{3+\sqrt{5}}\text{”}}{2} = 21 \in \mathbb{F}_{89}$

“$\sinh c$” $:= 23 \in \mathbb{F}_{89}$ (note : $21^2 - 23^2 = -88 \equiv 1$)

“$e^{i\pi/4}$” $:= 77 \in \mathbb{F}_{89}$ (note : $(77)^4 \equiv -1 \pmod{89}$)

“$e^{-i\pi/4}$” $:= 37 \in \mathbb{F}_{89}$ (inverse du précédent)

- Grâce à ça, $\begin{pmatrix} 77 & 0 \\ 0 & 37 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 23 & 21 \end{pmatrix}$ vérifient :

$\bar{R}^4 = 1$, $(\bar{R}^2\bar{T})^2 = 1$, $(\bar{R}\bar{T})^5 = 1$ (dans $PSL_2(\mathbb{F}_{89})$).

(De m̂ que $R = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \cosh c & \sinh c \\ \sinh c & \cosh c \end{pmatrix}$.)

On a aussi, par exemple, $\bar{T}^{11} = 1$ ($\Rightarrow$périodicité).

- 89 est le plus petit premier permettant ces constructions.

Discrétisation et périodisation

- On repère le quart-de-case où se trouve le joueur par un élément ξ de $PSL_2(\mathbb{F}_{89})$ (`current_fp`).
- L'élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{F}_{89})$ (où $0 \leq b, c, d < 89$, et $a = 1$ ou $[a = 0$ et $b = 1])$ est codé comme $a \times 89^3 + b \times 89^2 + c \times 89 + d$ (entier $< 1\,409\,938$).
  $\bar{R} =$ `pgl_fp_rot1` $= 705\,003$ et $\bar{T} =$ `pgl_fp_trn` $= 985\,320$
- Passer au quart-de-case droit[†] $\xi \leftarrow \xi \bar{R}$.
  Avancer d'une case $\xi \leftarrow \xi \bar{T}$ (en pratique, franchir un bord de case $\xi \leftarrow \xi\,\bar{T}\bar{R}^2$; où $\bar{T}\bar{R}^2 =$ `pgl_fp_tflip`).
- Le labyrinthe « est » le graphe de Cayley du groupe $PSL_2(\mathbb{F}_{89})$. (Discret $\Rightarrow$ pas de problèmes numériques.)
- Pour le déplacement continu, stocker aussi une transformation de Möbius (`current`) régulièrement réduite pour éviter les problèmes numériques.

[†] L'orientation est inhabituelle (convention canvas).

Exemples

- Position de référence $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ codée comme $89^3 + 1 = 704\,970$.
- Une case plus loin : $\bar{T} = \begin{pmatrix}21 & 23\\ 23 & 21\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1 & 35\\ 35 & 1\end{pmatrix}$ codé comme $89^3 + 35 \times 89^2 + 35 \times 89 + 1 = 985\,320$.
- Encore une case plus loin : $\bar{T}^2 = \begin{pmatrix}80 & 76\\ 76 & 80\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1 & 41\\ 41 & 1\end{pmatrix}$ codé comme $89^3 + 41 \times 89^2 + 41 \times 89 + 1 = 1\,033\,380$.
- Quart droit de la case de référence : $\bar{R} = \begin{pmatrix}77 & 0\\ 0 & 37\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 34\end{pmatrix}$ codé comme $89^3 + 34 = 705\,003$.
- Une case plus loin : $\bar{R}\bar{T} = \begin{pmatrix}15 & 80\\ 50 & 65\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}1 & 35\\ 33 & 34\end{pmatrix}$ codé comme $89^3 + 35 \times 89^2 + 33 \times 89 + 34 = 985\,175$.

Comment tracer les cases ?

- La fonction `draw_hyperbolic_square` (`_poincare` ou `_bk`) prend une transformation de Möbius `m` (et une couleur) et trace sur le canevas l'image du « carré » de référence par la transformation `m` (par approximation par des courbes de Bézier).
- Appelée depuis `draw_all` en composant la transformation actuelle (`current`) par tous les éléments du tableau des parties à tracer (`drawn_parts`).
- `drawn_parts` est lui-même calculé dans `compute_drawn_parts` en multipliant récursivement les éléments d'une file par R, R^3, T, en s'arrêtant si $|a|^2 \geq 50$ ou si l'élément correspondant dans $PGL_2(\mathbb{F}_{89})$ est déjà rencontré.
- Comme on repère naturellement des quarts-de-cases, chaque case sera référencée 4 fois.
- `world_table` est un tableau décrivant l'état du monde, indicé par le codage de $PGL_2(\mathbb{F}_{89})$.